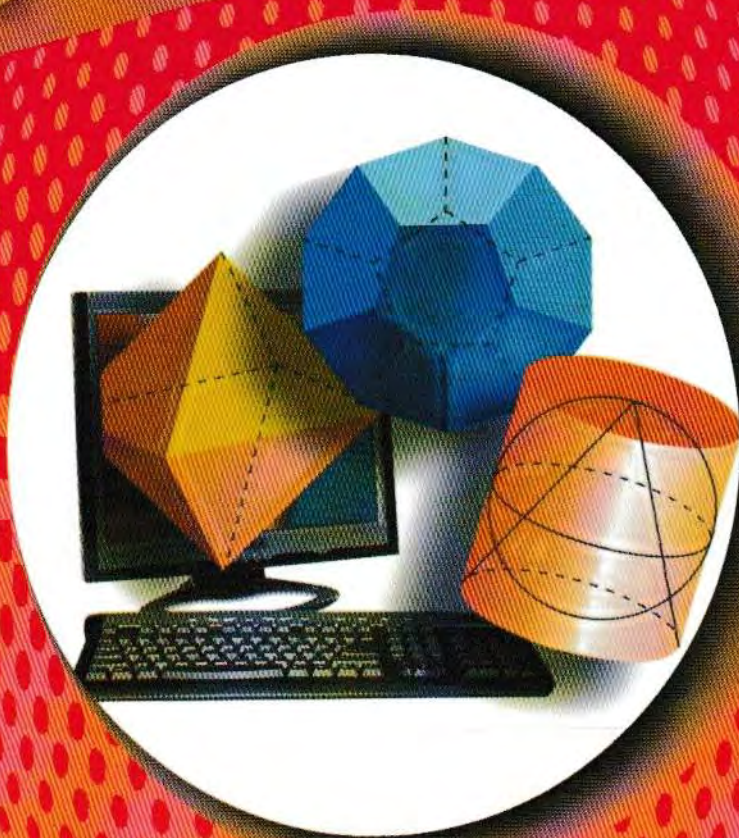


3

Polígonos - Cuadriláteros

Teoría y Práctica

GEOMETRÍA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Manuel Guevara - Luis Lazo

FONDO EDITORIAL
ARODO

3

Polígonos - Cuadriláteros

Teoría y Práctica

G
E
O
M
E
T
R
Í
A



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Rubén Trujillo - Alex Noa

FONDO EDITORIAL
ARODO



PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

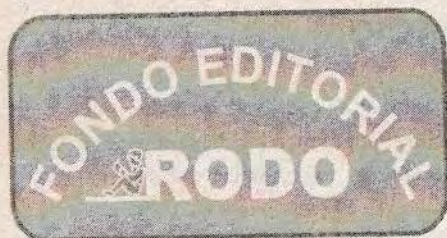
Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de interesantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benitez Nuñez.

POLÍGONOS - CUADRILÁTEROS



GEOMETRÍA - TEMA SELECTO 03, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Octubre 2013 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 📠 992 - 796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2013 - 14985

EQUIPO PEDAGÓGICO

Rúben Trujillo

Alex Noa

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

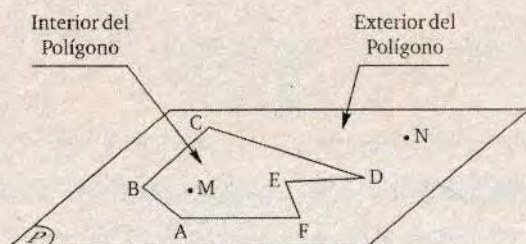
POLÍGONO**DEFINICIÓN**

Es la unión por sus extremos de tres o más segmentos coplanares tal que:

- Cada extremo es el extremo de solo dos segmentos
- Ningún par de segmentos se interseca excepto en un extremo.
- Ningún par de segmentos con el mismo extremo son colineales.

A cada punto extremo se le denomina vértice del polígono y a cada uno de los segmentos que lo forman se le denomina lado.

En el gráfico se muestra a un polígono contenido en un plano P.



- Elementos:**
- Vértices : A; B; C;F
 - Lados : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ $\overline{FA}$

Además:

M: Es un punto interior al polígono

N: Es un punto exterior al polígono

Notación: Polígono ABCDEF

NOTA

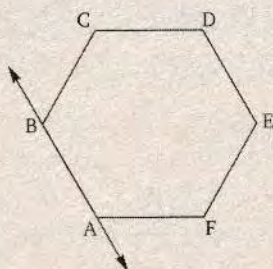
- La unión de un polígono y su interior se denomina **región poligonal**
- La suma de las longitudes de los lados de un polígono es denominada "perímetro de la región poligonal" (2p)
- Los ángulos que determinan cada par de lados consecutivos son los ángulos del polígono, en el gráfico anterior los ángulos serían: $\angle A$; $\angle B$;; $\angle E$ y $\angle F$.
- Al segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos de un polígono se le denomina diagonal; en el gráfico anterior las diagonales serían: $\overline{AC}$; $\overline{BE}$;

POLÍGONO CONVEXO Y POLÍGONO NO CONVEXO

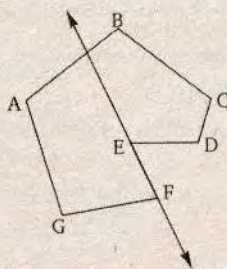
Un polígono es convexo si toda recta que contiene a uno de sus lados deja al resto del polígono a un lado de ésta.

Un polígono es no convexo si alguna recta que contiene a uno de sus lados deja una parte del polígono a un lado de la recta y la otra parte del otro lado.

Ejemplos:



Polígono ABCDEF es convexo



Polígono ABCDEFG es cóncavo

NOTA

El término "convexo" como se usa aquí, posee un significado distinto que el de conjunto convexo; de hecho un polígono convexo no es un conjunto convexo.

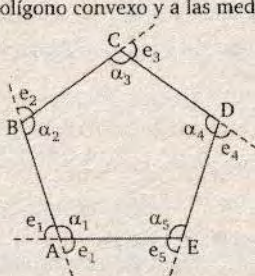
ÁNGULOS DEL POLÍGONO CONVEXO**Ángulos internos**

Son los ángulos que determinan dos lados consecutivos (uno por cada vértice).

Ángulos externos

Son los ángulos adyacentes suplementarios a los ángulos internos (se determinan dos por cada vértice).

En el gráfico se muestra a un polígono convexo y a las medidas de sus respectivos ángulos:



- 3) Suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono convexo considerando uno por cada vértice (S_e)

$$S_e = e_1 + e_2 + \dots + e_n = 360^\circ$$

No depende del número de lados

- 4) Número de diagonales de un polígono de "n" lados:

- Número de diagonales trazadas desde un vértice ($D_{(1v)}$)

$$D_{(1v)} = n - 3$$

- Número total de diagonales (D)

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

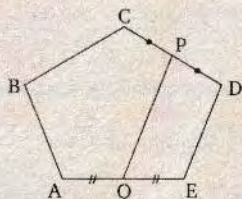
- Número de diagonales trazadas desde "m" vértices consecutivos ($D_{(m)}$)

$$D_{(m)} = mn - \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

NOTA

En algunos países, como el nuestro, al segmento que une los puntos medios de dos lados de un polígono se le denomina diagonal media.

En el gráfico se muestra a un pentágono ABCDE y a una de sus diagonales medias ($\overline{PQ}$).



En todo polígono de "n" lados, se verifica:

- Número de diagonales medias trazadas desde el punto medio de uno de sus lados.

$$(D_{M(1L)})$$

$$D_{M(1L)} = n - 1$$

- Número total de diagonales medias (D_M)

$$D_M = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Número de diagonales medias trazadas desde "m" puntos medios consecutivos ($D_{M(m)}$)

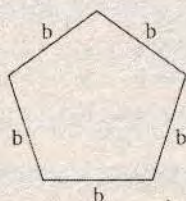
$$D_{M(m)} = nm - \frac{m(m+1)}{2}$$

POLÍGONOS ESPECIALES

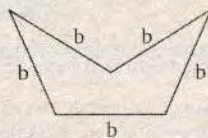
Polígono Equilátero

Es el polígono cuyos lados son de igual longitud.

Un polígono equilátero puede ser convexo o no convexo



Polígono equilátero convexo

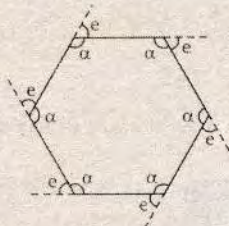


Polígono equilátero no convexo

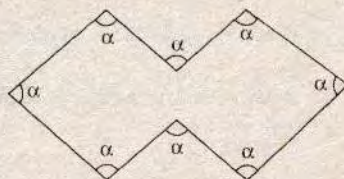
Polígono Equiángulo

Es el polígono cuyos ángulos son de igual medida. Un polígono equiángulo puede ser convexo o no convexo, las medidas de los ángulos externos también son iguales.

En el gráfico se muestra a un hexágono equiángulo (convexo) y a un octágono equiángulo (no convexo).



Polígono equiángulo convexo.



Polígono equiángulo no convexo.

Polígono Regular

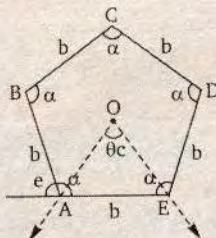
Es el polígono equilátero y equiángulo a la vez. Este polígono tiene centro y ángulo central.

Centro del polígono regular

Es un punto interior que equidista de los vértices

Ángulo central

Es el ángulo que se determina al unir el centro con dos vértices consecutivos



Si "O" es el centro

$$OA = OB = OC = OD = OE$$

θ_c : Medida del ángulo central.

e : Medida del ángulo exterior

Se verifica:

$$\theta_c = e = \frac{360^\circ}{n}$$

"n": # lados.

NOTA

En los polígonos equiángulos convexos se cumple:

$$m\angle \text{ exterior} = e = \frac{360^\circ}{n}$$

$$m\angle \text{ interior} = \alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

Donde "n" es el número de lados.

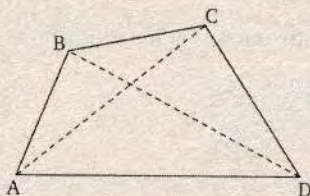
Para el hexágono mostrado anteriormente ($n = 6$); entonces:

$$e = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

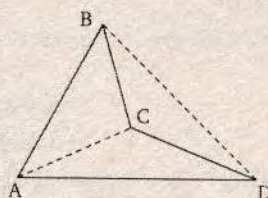
Además: $\alpha + e = 180^\circ \rightarrow \alpha = 120^\circ$

CUADRILÁTERO**DEFINICIÓN**

Es el polígono de cuatro lados; los cuadriláteros puede ser convexos o no convexos (cóncavo). En el gráfico se muestra a dichos cuadriláteros:

ABCD: convexo

Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

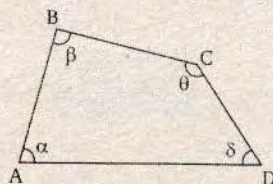
ABCD: no convexo o cóncavo

Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Por su importancia estudiaremos al cuadrilátero convexo.

Teorema 1

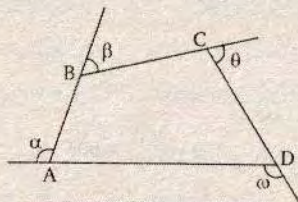
En todo cuadrilátero convexo, la suma de las medidas de los ángulos internos es 360°



$$\alpha + \beta + \theta + \delta = 360^\circ$$

Teorema 2

En todo cuadrilátero convexo, la suma de medidas de los ángulos externos considerando uno por cada vértice es 360°



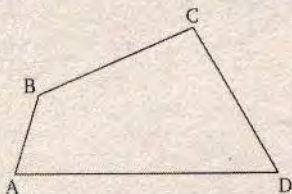
$$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360^\circ$$

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Los cuadriláteros convexos se clasifican teniendo en cuenta el paralelismo de su

A) TRAPEZOIDE

Es el cuadrilátero cuyos lados opuestos no son paralelos.



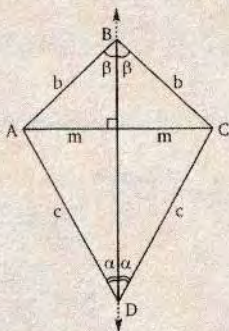
Si: $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \not\parallel \overline{AD}$

Entonces:

ABCD: trapezoide

NOTA

Trapezoide Simétrico. Es aquel trapezoide donde una de las diagonales es parte de la mediatriz de la otra. A los trapezoides que no presentan dicha característica se les denomina asimétrico.



$\overleftrightarrow{BD}$: Mediatriz de $\overline{AC}$
 ABCD : Trapezoide simétrico

Por propiedad de la Mediatriz

$$AB = BC$$

$$AD = CD$$

Además

$\overline{BD}$: bisectriz $\angle ABC$

$\overline{DB}$: bisectriz $\angle ADC$

B) TRAPECIO

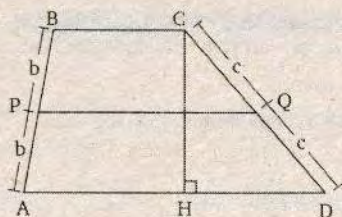
Es el cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos; los otros dos no son paralelos.

Bases. Son los lados paralelos

Laterales. Son los lados no paralelos

Base media o Mediana. Es el segmento cuyos extremos son los puntos medios de los laterales.

Altura. Es la perpendicular trazada a partir de un punto de una base hacia la recta que contiene a la otra base.



Si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$

Entonces:

ABCD: trapecio

Además:

Bases : $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$

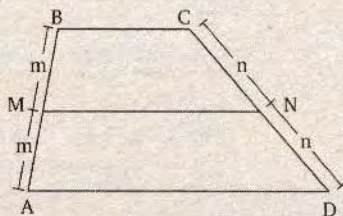
Laterales : $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

Base media : $\overline{PQ}$

Altura : $\overline{CH}$

Teorema 1

En todo trapecio la base media es paralela a las bases y su longitud es igual a la semisuma de longitudes de las bases.



$\overline{MN}$: base media del trapecio ABCD

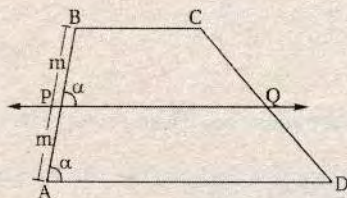
Se cumple:

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$$

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

Teorema 2

En todo trapecio, si por el punto medio de un lateral se traza una recta paralela a las bases entonces dicha recta interseca al otro lateral en su punto medio.

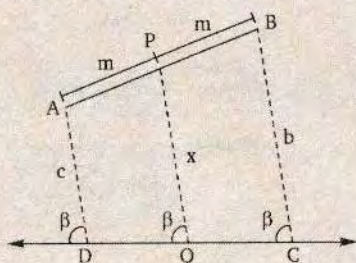


Si: $AP = PB$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Entonces:

$$CQ = QD$$

NOTA



Si: $AP = PB$ y $\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

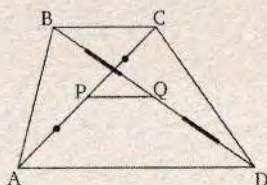
Entonces:

$$DQ = QC$$

$$x = \frac{b+c}{2}$$

Teorema 3

En todo trapecio el segmento cuyos extremos son los puntos medios de sus diagonales es paralelo a las bases y su longitud es igual a la semidiferencia de longitudes de las bases.



Si: ABCD es un trapecio y $AP = PC$; $BQ = QD$.

Entonces:

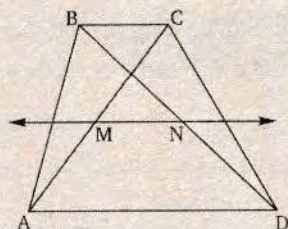
$$\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

Además:

$$PQ = \frac{AD - BC}{2}$$

NOTA

a)



Si $AM = MC$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

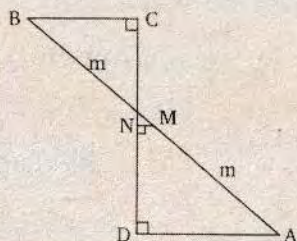
Entonces:

$$BN = ND$$

Además:

$$NM = \frac{AD - BC}{2}$$

b)

Si: $BM = MA$

Entonces:

$$CN = ND$$

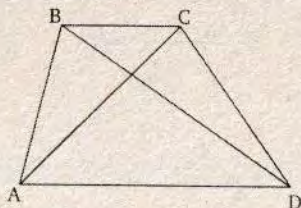
Además:

$$NM = \frac{AD - BC}{2}$$

CLASES DE TRAPECIO

Los trapecios se clasifican, teniendo en cuenta la comparación de longitudes de los laterales, en:

Trapezio escaleno. Es el trapezio cuyos laterales tienen longitudes diferentes



Si: $ABCD$ es un trapezio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ y $AB \neq CD$

Entonces:

$$ABCD: \text{Trapezio Escaleno}$$

Además:

- Los ángulos internos cuyos vértices son extremos de una base tienen medidas diferentes.

$$m\angle A \neq m\angle D$$

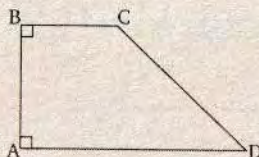
$$m\angle B \neq m\angle C$$

- Las diagonales tienen longitudes diferentes

$$AC \neq BD$$

NOTA

Trapezio rectángulo. Es el trapezio escaleno en el que un lateral es perpendicular a las bases.



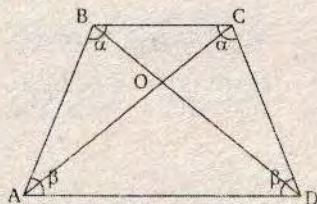
$$m\angle A = m\angle B = 90^\circ$$

$$AB \neq CD$$

Entonces:

ABCD: Trapecio rectángulo recto en A y B

Trapecio isósceles. Es el trapecio cuyos laterales tienen longitudes iguales



Si: ABCD: Trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ y $AB=CD$

Entonces:

ABCD: Trapecio isósceles

Además

Los ángulos internos cuyos vértices son extremos de una misma base tienen medidas iguales.

$$m\angle A = m\angle D$$

$$m\angle B = m\angle C$$

Las diagonales tienen longitudes iguales.

$$AC = BD$$

Los triángulos formados por las diagonales y las bases son isósceles pudiendo ser equiláteros en algunos casos.

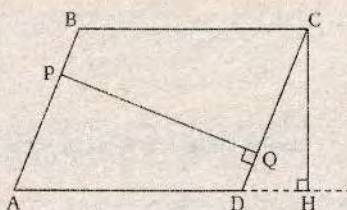
$$AO = OD$$

$$BO = OC$$

C) PARALELOGRAMO

Es el cuadrilátero que tiene sus pares de lados opuestos paralelos.

Altura. Es la perpendicular trazada a partir de un punto de un lado hacia la recta que contiene al lado opuesto.



Si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Entonces:

ABCD: paralelogramo

$\overline{CH}$: altura relativa a $\overline{AD}$

$\overline{PQ}$: altura relativa a $\overline{CD}$

NOTA

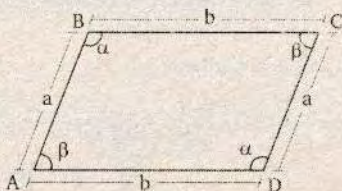
$\overline{PQ}$ y $\overline{CH}$ no necesariamente son congruentes.

Teorema 1

En todo paralelogramo los lados opuestos tienen longitudes iguales.

Teorema 2

En todo paralelogramo los ángulos opuestos tienen igual medida.



ABCD: Paralelogramo

Se cumple:

$$AB = CD$$

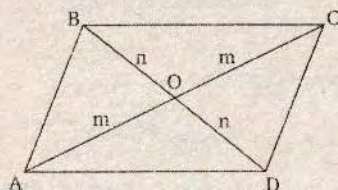
$$BC = AD$$

$$m\angle ABC = m\angle CDA$$

$$m\angle BAD = m\angle BCD$$

Teorema 3

En todo paralelogramo las diagonales se bisecan mutuamente.



ABCD: Paralelogramo

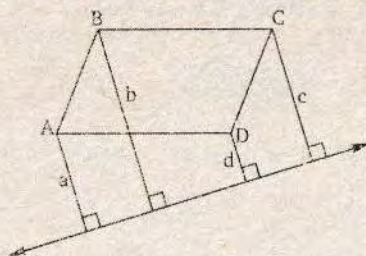
Entonces:

$$AO = OC$$

$$BO = OD$$

Teorema 4

La suma de las distancias de dos vértices opuestos hacia una recta exterior es igual a la suma de las distancias de los otros dos vértices opuestos hacia dicha recta.



ABCD: Paralelogramo

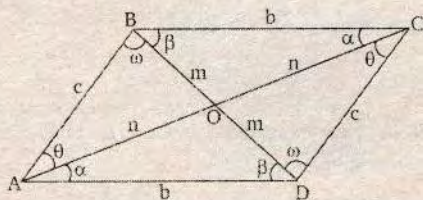
Entonces:

$$a + c = b + d$$

CLASES DE PARALELOGRAMO

Los paralelogramos se clasifican teniendo en cuenta las medidas de sus elementos (lados y ángulos)

Romboide. Es el paralelogramo cuyos lados consecutivos tienen longitudes diferentes y sus ángulos tienen medidas diferentes de 90°



BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 03

Si $AB \neq BC$ y $m\angle A \neq 90^\circ$

Entonces:

ABCD: Romboide

Además:

- Las diagonales tienen longitudes diferentes

$AC \neq BD$

- La medida del ángulo que determinan las diagonales es diferente de 90°

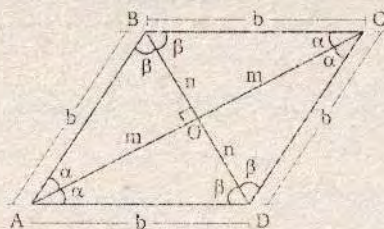
$m\angle BOA \neq 90^\circ$

- Las diagonales no son "bisectrices" de los ángulos internos

$m\angle BAO \neq m\angle DAO$

$m\angle ABO \neq m\angle CBO$

Rombo. Es el paralelogramo cuyos lados son de igual longitud y sus ángulos tienen medidas diferentes de 90°



Si: $AB = BC = CD = AD$ y $m\angle A \neq 90^\circ$

Entonces:

ABCD: Rombo

Además:

- Las diagonales de un rombo tienen longitudes diferentes

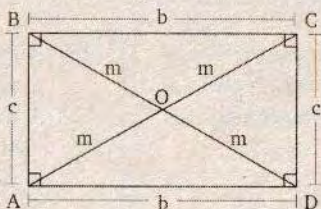
$AC \neq BD$

- Las diagonales de un rombo son perpendiculares

$m\angle BOA = 90^\circ$

- Las diagonales de un rombo son "bisectrices" de los ángulos del rombo.
- Las alturas del rombo son congruentes.

Rectángulo. Es el paralelogramo cuyos ángulos miden 90° y sus lados consecutivos tienen longitudes diferentes.



Si: $m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90^\circ$ y $AD \neq AB$

Entonces:

ABCD: Rectángulo

Además:

- Los diagonales de un rectángulo son de igual longitud.

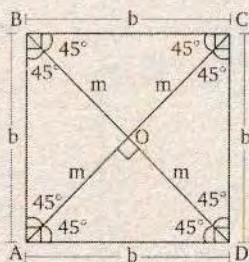
$AC = BD$

- Las diagonales de un rectángulo no son perpendiculares.

$m\angle BOA \neq 90^\circ$

- Las diagonales de un rectángulo forman con los lados de él, cuatro triángulos isósceles.

Cuadrado. Es el paralelogramo cuyos lados son de igual longitud y sus ángulos tienen medidas iguales a 90° .



Si: $AB = BC = CD = DA$ y $m\angle A = 90^\circ$

Entonces:

ABCD: cuadrado

Además:

- Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

$m\angle BOA = 90^\circ$

Las diagonales de un cuadrado son "bisectrices" de sus ángulos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuál es el polígono cuyo número de diagonales es el doble del número de diagonales de otro polígono que tiene tres lados menos?
- A) Cuadrado B) Hexágono
C) Octágono
D) Decágono E) Dodecágono
2. 9 es el número de diagonales en que se pueden trazar desde 5 vértices consecutivos de un polígono regular de
- A) 5 lados B) 6 lados
C) 7 lados
D) 8 lados E) 9 lados
3. En un polígono convexo en donde el número de diagonales es igual a su número de lados, halle la suma de las medidas de los ángulos agudos cuyos vértices son las intersecciones de las prolongaciones de sus lados.
- A) 170° B) 180° C) 190°
D) 360° E) 720°
4. En un polígono convexo de "n" lados ($n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$), desde cuatro vértices consecutivos se trazan 21 diagonales. Entonces, el polígono es un
- A) Hexágono B) Heptágono
C) Octágono
D) Decágono E) Nonágono
5. En un polígono regular de "n" lados, se aumenta 10 lados, la medida de su ángulo interior se incrementa en 3° . Entonces el número de lados del polígono es:
- A) 12 B) 18 C) 24
D) 30 E) 36
6. Se tienen dos polígonos regulares cuyas medidas de sus ángulos internos difieren en 20° y las medidas de sus ángulos externos suman 100. Calcule su número de lados.
- A) 5 y 10 B) 6 y 9
C) 4 y 11
D) 3 y 12 E) 8 y 10
7. Por los vértices A y C de un paralelogramo ABCD se trazan las rectas L_1 y L_2 respectivamente tal que $L_1 \perp \overline{AB}$, $L_2 \perp \overline{BC}$, $L_1 \cap L_2 = \{E\}$. Si la $m \angle DEC = 23^\circ$, Halle la $m \angle ACB$.
- A) 21° B) 22° C) 23°
D) 24° E) 25°
8. ABCD es un trapecioide simétrico: $\overline{AB}$ perpendicular a $\overline{BC}$, $m \angle BCD = 60^\circ$ y $\overline{AB} \cong \overline{AD}$. Si M punto medio de $\overline{AC}$ la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{DM}$ es
- A) 70 B) 75 C) 85
D) 90 E) 100

9. ABCD es un cuadrado, se trazan los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$: con $M \in \overline{CD}$ y $N \in \overline{AD}$ (M y N puntos medios).

Si $BC = 4\sqrt{2}$. Determine la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. ABCD es un cuadrilátero convexo.
 $m\angle ABC = 90$, $m\angle CAD + m\angle ACD = 45$.

Si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD}$, entonces:

la $m\angle CAD$ es:

- A) 15 B) 20 C) 25
D) 30 E) 35

11. En un cuadrilátero convexo ABCD se trazan las bisectrices interiores formándose un nuevo cuadrilátero. Entonces, la suma de las medidas de dos ángulos opuestos de este cuadrilátero es:

- A) 120 B) 180 C) 150
D) 140 E) 110

12. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), P y Q son: puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Además: $\overline{AC} \cap \overline{PQ} = \{E\}$, $\overline{PQ} \cap \overline{BD} = \{F\}$
la prolongación de $\overline{CF}$ intercepta a $\overline{AD}$ en G. Si $BC = a$ y $AD = 50$, entonces $(2EF + GD)$ es:

- A) $\frac{50+a}{5}$ B) $\frac{50+a}{3}$
C) $\frac{100+a}{3}$
D) 50 E) 40

13. En un polígono convexo de n lados, halle el número de diagonales medias sin considerar aquellas que unen los puntos medios de lados consecutivos del polígono.

- A) $\frac{n}{2}$ B) $\frac{n(n-2)}{3}$
C) $\frac{n(n+1)}{2}$
D) $\frac{n(n-3)}{2}$ E) $\frac{n(n-1)}{2}$

14. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$) las bisectrices interiores de los ángulos A y B se interceptan en P y las bisectrices interiores de los ángulos C y D se interceptan en Q. Determine la longitud del segmento $\overline{PQ}$ si:

$$AB = 6, \quad BC = 4$$

$$CD = 8, \quad AD = 10$$

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0
D) 2 E) $\frac{3}{2}$

15. ABCD es un trapecio rectangular, se traza $\overline{CE}$ ($E \in \overline{AB}$) perpendicular a $\overline{BD}$ que la intercepta en el punto M.

$$\overline{AB} \cong \overline{AD}, \quad m\angle BDA = 60$$

$$\overline{EN} \text{ paralelo a } \overline{AD} \quad (N \in \overline{BD}).$$

$$\text{Si } m\angle C = m\angle D = 90 \text{ y } AB = 8$$

entonces $\overline{NM}$ mide:

- A) 2 B) 2,5 C) 3
D) 3,5 E) 1,5

16. En un polígono el número de diagonales medias, es igual al doble del número de diagonales. Determine el número de lados del polígono.
- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7
17. En un triángulo ABC: $AB = BC$, si sobre la bisectriz exterior de B, se ubica un punto D y en la prolongación de $\overline{AC}$ un punto E, de tal manera que $DE = AB$, entonces ABDE es:
- A) Un rectángulo
B) Un rombo
C) Un paralelogramo
D) Un trapecio isósceles
E) N. A.
18. En un rectángulo ABCD se ubica el punto E en la prolongación de $\overline{AD}$ de modo que: $m\angle CAD = m\angle ECD$, M punto medio de $\overline{CE}$. Si $AC = 2(CD) = 4$, entonces $\overline{DM}$ mide:
- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
19. En un pentágono convexo ABCDE tres de sus ángulos internos miden: $m\angle B = 150^\circ$, $m\angle C = 160^\circ$ y la $m\angle D = 170^\circ$. Entonces, la medida del ángulo obtuso que forman las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ es:
- A) 130° B) 110° C) 135°
D) 120° E) 140°
20. ABCD es un rectángulo, se traza $\overline{BM}$ (M punto medio de $\overline{CD}$), la diagonal $\overline{AC}$ la intercepta en el punto N. Si $NC = 2$ entonces el lado AC mide:
- A) 7 B) 6 C) 6,5
D) 5 E) 5,5
21. ¿Cuál es el polígono cuyo número de diagonales es el cuádruple del número de diagonales de otro polígono que tiene tres lados menos?
- A) Cuadrado B) Pentágono
C) Heptágono
D) Octágono E) Dodecágono
22. En un cuadrilátero convexo ABCD, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, $m\angle BCA = 30^\circ$, $m\angle BAC = 3\alpha$, $m\angle CAD = 4\alpha$ y $m\angle ADB = 7\alpha$, entonces α es:
- A) 6 B) 18 C) 9
D) 10 E) 12
23. En un polígono regular ABCDE....., $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ determinan un ángulo de medida 160° . El número de lados del polígono es:
- A) 12 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

24. En un triángulo ABC, por el punto medio M de $\overline{AB}$ se traza una recta secante L que intercepta a $\overline{BC}$ en T. Las distancias trazadas de A y el punto medio de $\overline{BC}$ a L miden $4u$ y $1u$ respectivamente. Halle la longitud de $\overline{MQ}$ ($\overline{AQ} \cong \overline{QC}$).

Si $m\angle QMT = 30$

- A) 3 B) 4 C) 10
D) 8 E) 5

25. Al disminuir en 5 la medida de cada ángulo interno de un polígono equiángulo, resulta otro polígono equiángulo cuyo número de lados es las $3/4$ partes del número de lados del polígono original. Entonces, la medida del ángulo externo del primer polígono es:

- A) 10 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

26. Si el número de lados de un polígono regular se incrementa en a , a la medida del ángulo exterior se reduce en $\frac{3}{4}a^3$ grados.

Calcule la suma de los números de lados inicial y final del polígono citado.

- A) 20 B) 22 C) 24
D) 25 E) 18

27. En un nonágono cualquiera en donde sus ángulos interiores están en progresión aritmética, uno de sus ángulos siempre mide:

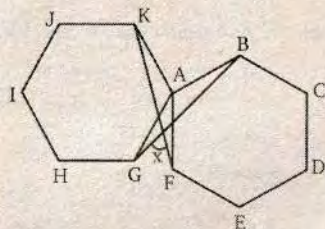
- A) 150 B) 140 C) 130
D) 120 E) 100

28. En un paralelogramo ABCD, se ubica M punto medio de $\overline{CD}$. Por el vértice D se traza una perpendicular al lado $\overline{AD}$, dicha perpendicular intercepta a $\overline{BM}$ en Q.

Si $BQ = a$ y $QM = b$, entonces la longitud de $\overline{AQ}$ es:

- A) $(a + b)$ B) $(2a + b)$
C) $(2b + a)$
D) $(3a + b)$ E) $(3a - b)$

29. En la figura mostrada, ABCDEF y AGHIJK son polígonos regulares congruentes. Calcule x .



- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 68° E) 75°

30. Si un polígono de n lados tuviera $(n - 3)$ lados, tendría $(n + 3)$ diagonales menos. ¿Qué polígono es?
- A) Triángulo B) Cuadrilátero
C) Pentágono
D) Hexágono E) Octógono
31. En un paralelogramo ABCD, se construyen hacia el interior los triángulos equiláteros ABF y BCE, calcular la $m \angle FDE$.
- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 72° E) 75°
32. En un cuadrilátero convexo ABCD, las diagonales son perpendiculares. Si $m \angle ABD = 70$, $m \angle DBC = 40$ y $m \angle CAD = 10$, entonces la $m \angle BDC$ es:
- A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 75
33. En un cuadrilátero convexo ABCD, la $m \angle ABC = m \angle ADC = 90$. Si $AD=DC$, $AB=a$, $BC=b$, $\overline{DH}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ ($H \in \overline{BC}$). Halle DH.
- A) $a + b$ B) $2a - b$
C) $2b - a$
D) $\frac{a+b}{2}$ E) $\frac{a+b}{4}$
34. Se tienen tres polígonos convexos equiángulos tal que el número de diagonales totales del primer y tercer polígonos están en la relación de 1 a 6, la suma de las medidas de los ángulos internos del segundo y primer polígonos se diferencian en 360 y las medidas de los ángulos externos del tercer y segundo polígonos están en la relación de 2 a 3. Calcule la medida del ángulo interno del primer polígono.
- A) 60 B) 90 C) 108
D) 120 E) 140
35. En un paralelogramo UNIV, por la intersección de sus diagonales se traza una recta L, la distancia de N a L es 12u, halle la suma de las distancias de los puntos medios de $\overline{UV}$ y $\overline{VI}$ a la recta L.
- A) 3u B) 6u C) 8u
D) 10u E) 12u
36. En un trapecio ABCD; $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Si M es punto medio de $\overline{AB}$; se traza $\overline{CN}$, la cual biseca a $\overline{MD}$ en el punto Q. ($N \in \overline{AD}$). Halle QN. Si $QC = 6$
- A) 2 B) 1 C) 4
D) 7 E) 5

37. La medida del ángulo interior y el ángulo exterior de un polígono regular es $m\theta$ y θ respectivamente donde m es un número entero, calcule el menor número de lados del polígono regular que cumple con esa condición.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

38. En un trapecio las diagonales miden $10u$ y $14u$. Calcule el menor valor entero de su mediana.

A) $1u$ B) $2u$ C) $3u$
D) $4u$ E) $5u$

39. Se tiene un triángulo ABC y una recta L exterior al triángulo. Luego se trazan las perpendiculares $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ a la recta L. Si $AA' + BB' + CC' = K$, entonces la longitud de la perpendicular trazada desde el baricentro G de la región triangular ABC a la recta L es:

A) $\frac{K}{2}$ B) $\frac{2K}{3}$ C) $\frac{K}{3}$
D) $\frac{3K}{5}$ E) $\frac{5K}{3}$

40. Si un polígono convexo de n lados tuviera cuatro lados menos, entonces tendría $(n + 10)$ diagonales menos. Calcular $\left(\frac{n}{2}\right)$

A) 12 B) 6 C) 4
D) 7 E) 5

41. En un cuadrilátero ABCD:

$$AB = CB = BD; m\angle BAD = 3\alpha;$$

$$m\angle BCD = 2\alpha \text{ y } \frac{m\angle ADC}{m\angle ABC} = \frac{3}{2}.$$

$$m\angle D - m\angle B.$$

A) 10 B) 30 C) 45
D) 60 E) 72

42. En un cuadrilátero convexo ABCD, $\overrightarrow{AC}$ es bisectriz del $\angle BAD$.

$$\text{Si: } m\angle CAD = \frac{m\angle BDA}{3} = \frac{m\angle BCA}{2},$$

$m\angle ADC = 90^\circ$, entonces la $m\angle ACD$ es:

A) 45 B) 50 C) 55
D) 65 E) 75

43. En un cuadrilátero FGST:

$$m\angle TFS = m\angle GSF = m\angle FST = 15^\circ$$

$$m\angle FGT = 90^\circ; \text{ determine la } m\angle GFS.$$

A) 15° B) $22,5^\circ$ C) 30°
D) 35° E) 45°

44. Si la medida de cada ángulo interior de un polígono regular de n lados ($n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$) disminuye en $(5n - 3)$. Entonces, el número de lados es:

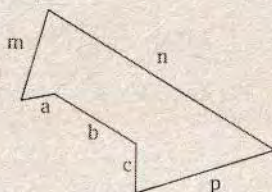
A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

45. En un cuadrilátero convexo ABCD, la mediatriz de $\overline{AD}$ pasa por B.

Si $m\angle BCA = 30^\circ$, $m\angle CAD = 20^\circ$ y $m\angle ADC = 80^\circ$, entonces la $m\angle BAC$ es:

- A) 10° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 24°

46. Si $n - b = k$. ¿Cuál de las expresiones es correcta?



- I. $\frac{a+c}{2} < m + p - k$
II. $a + c + k < m + p$
III. $a + c < m + p + k$
IV. $a + c < \frac{m+p}{2} - k$

- A) Sólo I B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo IV E) Sólo I y III

47. Se tiene un octógono equiángulo ABCDEFGH. Si $AB = 2$ cm, $BC = \sqrt{2}$ cm, $CD = 3$ cm. Calcule AD (en cm).

- A) $\sqrt{3}$ B) 5 C) 6
D) 6,5 E) 4,4

48. En un trapecio ABCD se ubican M, punto medio de $\overline{AB}$ y N es punto medio de la base mayor $\overline{AD}$, luego $\overline{CN}$ biseca a $\overline{DM}$ en R. Si $RC = 6$. Halle RN.

- A) 2,0 B) 3,8 C) 4,0
D) 4,2 E) 4,4

49. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$) las bisectrices interiores de los ángulos A y B se interceptan en P y las bisectrices interiores de los ángulos C y D se interceptan en Q. Si $AB = 6u$, $BC = 4u$, $CD = 8u$ y $AD = 10u$, entonces la longitud de $\overline{PQ}$ es:

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0
D) 2 E) $\frac{3}{2}$

50. En un cuadrilátero VRFS:

la $m\angle SRF = 12^\circ$, la $m\angle RSV = 39^\circ$,

$m\angle RSF = 18^\circ$, $H \in \overline{RS}$, $HS = 2u$,

$m\angle VHS = 90^\circ$; halle FS.

- A) 3u B) 4u C) 5u
D) 6u E) 7u

51. En un polígono convexo de n lados ($n > 4$), las prolongaciones de los lados determinan un conjunto de ángulos. Si la razón entre la suma de medidas de dichos ángulos y la suma de medidas de los ángulos internos del polígono dado es $6/7$, halle el número de diagonales del polígono.

A) 65 B) 77 C) 90
D) 104 E) 119

52. En un polígono regular ABCDE... $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{Q\}$; $m\angle A Q D = 150^\circ$; halle el número de diagonales.

A) 27 B) 35 C) 44
D) 54 E) 65

53. En un trapecio ABCD cuyas bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ miden $13u$ y $20u$, se trazan las bisectrices interiores y exteriores de los vértices B y C interceptándose en P y Q de manera que $\overline{BP} \parallel \overline{AQ}$. Calcule PQ.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

54. En un polígono convexo de número de lado par se cumple que 10 veces su número de diagonales medias es igual a $17b$ veces su número de lados, donde b es un número entero, halle la suma de las medidas de sus ángulos interiores

A) 2680° B) 2088° C) 2880°
D) 6280° E) 6820°

55. En un cuadrilátero convexo ABCD se verifica que: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$

$$\text{Si } m\angle ACD = 11m\angle BCA \text{ y}$$

$$m\angle CAD = 5m\angle BCA$$

entonces la $m\angle BCA$ es:

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

56. En un rectángulo ABCD, se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BD}$. Las bisectrices de los ángulos HAB y DBC se interceptan en el punto P, luego se traza $\overline{PM}$ perpendicular a $\overline{CD}$. ($H \in BD \wedge M \in CD$). Si $BC = a$ y $PM = b$, entonces la longitud de $\overline{BH}$ es:

A) $\frac{2a+b}{2}$ B) $\frac{a+2b}{2}$ C) $2(a-b)$
D) $a-b$ E) $\frac{2a+b}{3}$

57. Al aumentar en seis el número de lados de un polígono regular de $(n+3)$ lados, la medida de cada ángulo externo del polígono disminuye en 3. Entonces, el número de lados del polígono regular es:

A) 16 B) 18 C) 24
D) 21 E) 17

58. En un polígono regular ABCDEFG.... de n lados; $m\angle ACF = 150^\circ$. Halle el número de diagonales medias

A) 270 B) 272 C) 274
D) 2761 E) 435

59. En un paralelogramo ABCD, sus lados miden $AB = a$ y $BC = b$. Halle la longitud de la diagonal del cuadrilátero que se forma al trazar las bisectrices exteriores del paralelogramo
- A) $a + b$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $a - b$ E) $b - a$
60. En un trapecio ABCD ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) la diagonal $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle BAD$ y además es perpendicular a $\overline{CD}$, sean E, M y Q puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{EM}$ respectivamente; sea $R \in \overline{BC}$ tal que $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$. Si $BC = 18u$, calcule QR.
- A) 13u B) 13,5u C) 14u
D) 14,5u E) 15u
61. ABCD es un rombo $m\angle ABC = 120$. M punto medio de $\overline{BC}$, N punto de intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$. Si $AB = 8$ entonces $\overline{NB}$ mide:
- A) 3 B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{7}{3}$
D) $\frac{5}{2}$ E) 2
62. En un cuadrilátero ABCD, se verifica que: $m\angle ABD = 20$, $m\angle CBD = 80$, $m\angle BDA = 40$ y $m\angle BDC = 70$. Entonces, la $m\angle ACD$ es:
- A) 20 B) 15 C) 10
D) 8 E) 12
63. En un cuadrilátero ABCD, no convexo en D, la $m\angle B = 90^\circ$, $m\angle C = x$, $m\angle A = 15$, $AB = BC = CD$. Halle x.
- A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°
64. En el interior de un pentágono regular ABCDE se ubica un punto P tal que $\overline{DP} \cong \overline{AB}$. Si la $m\angle CPD = 66^\circ$, entonces la $m\angle PAB$ es:
- A) 41 B) 40 C) 48
D) 55 E) 42
65. En un cuadrilátero ABCD se verifica que: $AB = BC = CD$
Si $m\angle ACD = 11m\angle BCA$ y $m\angle CAD = 5m\angle BCA$, entonces la $m\angle BCA$ es:
- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9
66. En un cuadrilátero convexo ABCD se cumple: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$, $m\angle BAC = 50$ y $m\angle CAD = 30$. Halle la $m\angle ACD$.
- A) 110 B) 112 C) 115
D) 120 E) 125

67. La suma de las medidas de K ángulos internos consecutivos de un polígono convexo es S° . Entonces la suma de medidas de los ángulos externos correspondientes a los vértices restantes es:
- A) $S^\circ - 180K$
 B) $S^\circ - 180(K-1)$
 C) $S^\circ - 90(K-2)$
 D) $S^\circ - 180(K-2)$
 E) $S^\circ - 90K$
68. En un trapecio $ABCD$ ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$. Si $m\angle BAC = \frac{m\angle HBC}{2} = \frac{m\angle ACD}{3}$, y $BC = 5\text{ cm}$, $AD = 9\text{ cm}$. Calcule BH (en cm).
- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
 D) 2 E) 3
69. Las medidas de los ángulos internos de un nonágono convexo están en progresión aritmética. Entonces, el valor máximo de la razón aritmética es:
- A) 8 B) 9 C) 18
 D) 25 E) 35
70. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, la mediatriz de $\overline{AD}$ pasa por B . Si $m\angle BCA = 30^\circ$, $m\angle CAD = 20^\circ$ y $m\angle ADC = 80^\circ$. Halle $m\angle BAC$.
- A) 10 B) 15 C) 18
 D) 20 E) 24
71. ¿Cuántos polígonos equiángulos convexos existen de manera que la medida de su ángulo interno en grados sexagesimales esté representado por un número entero?
- A) 2 B) 23 C) 22
 D) 21 E) 20
72. En un polígono convexo cuyo número de lados es par, si el máximo número de diagonales trazados desde todos los vértices no consecutivos es 39. Halle el número de diagonales trazados desde los 3 primeros vértices no consecutivos.
- A) 20 B) 22 C) 24
 D) 26 E) 28
73. En un polígono convexo desde los cinco primeros vértices consecutivos, y desde los cinco últimos vértices, se trazan en total 125 diagonales, entonces el número de diagonales medias trazadas desde los tres primeros lados es:
- A) 78 B) 28 C) 68
 D) 98 E) 58

74. En un hexágono equiángulo ABCDEF se tiene que: $AB = 7u$, $BC = 3u$, $CD = 5u$ y $EF = 2u$. Calcule la suma de las distancias de un punto interior hacia los lados AB, CD y EF.
- A) $7\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $\frac{17}{2}\sqrt{2}$
D) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{13}{2}\sqrt{3}$
75. En un triángulo ABC desde el vértice B se trazan las perpendiculares $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ a las bisectrices exteriores de los ángulos A y C, luego se trazan las perpendiculares $\overline{BF}$ y $\overline{BG}$ a las bisectrices internas de los ángulos C y A. Si $DF = a$, $GE = b$ y $FG = \frac{a+b}{2}$ entonces la longitud de $\overline{DE}$ es:
- A) $\frac{4}{3}(a+b)$ B) $\frac{2}{3}(a+b)$ C) $\frac{3}{2}(a+b)$
D) $\frac{5}{3}(a+b)$ E) $2(a+b)$
76. ABCD es un cuadrado, el punto O es la intersección de sus diagonales, N punto medio de $\overline{AD}$, P y Q puntos de $\overline{BN}$ de modo que $\overline{CP}$ y $\overline{AQ}$ son perpendiculares a $\overline{BN}$. Si $CP = n$ entonces la distancia de O a $\overline{BN}$ es:
- A) n B) $\frac{n}{4}$ C) $\frac{2n}{3}$
D) $\frac{n}{3}$ E) $\frac{4n}{5}$
77. En un triángulo ABC se traza la mediana BM. Si $m\angle BAC = m\angle MBC = 2\alpha$ y $m\angle BCA = \alpha$, determine el valor de α
- A) 5 B) 8 C) 10
D) 15 E) 20
78. Las medidas de los ángulos externos de un pentágono convexo son números enteros y están en progresión aritmética y la razón toma su mayor valor entero. Halle la medida del mayor ángulo externo.
- A) 126° B) 134° C) 142°
D) 150° E) 158°
79. Sobre los lados AB y BC de un triángulo ABC se construye exteriormente los cuadrados ABDE y BCGF. Calcule la distancia entre los centros de dichos cuadrados sabiendo que $AF + CD = 8$.
- A) 4 B) 6 C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$
80. En un cuadrilátero ABCD la diagonal $\overline{BD}$ es perpendicular a $\overline{CD}$, además $\overline{CE}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ en E y $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BD}$ en H. Sabiendo que $EC = 15$ cm, $CD = 5$ cm y $AB = BF$ siendo "F" el punto de intersección de las diagonales. Calcule AH en cm.
- A) 2,5 B) 10 C) 20
D) 12 E) 15

81. El doble de la diferencia entre el número de diagonales medios y el número de diagonales de un polígono convexo es igual a m veces, el número máximo de ángulos interiores agudos que tiene el polígono más la raíz cúbica del número de lados, calcule el menor valor de m , si es entero.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 17 E) 21

82. ABC es un triángulo obtusángulo $\overline{BM}$ mediana del triángulo

$$(m \angle B > 90^\circ) \quad m \angle A = 2m \angle C.$$

Calcule la $m \angle MBC$;

$$\text{si } m \angle MBC = m \angle A$$

A) 40 B) 30 C) 15
D) 10 E) 5

83. En un cuadrilátero ABCD convexo, $\overrightarrow{AC}$ es bisectriz de $\angle BAD$, Si:

$$m \angle CAD = \frac{m \angle BDA}{3} = \frac{m \angle BCA}{2},$$

$m \angle ADC = 90^\circ$, entonces la $m \angle ACD$ es:

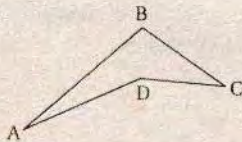
A) 45 B) 50 C) 55
D) 65 E) 75

84. En la figura mostrada se verifica que:

$$\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \overline{BC}. \quad \text{Si } m \angle BAD = 2\alpha,$$

$m \angle BCD = 5\alpha$ y $m \angle ABC = 60^\circ + 2\alpha$ entonces α es:

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 24°

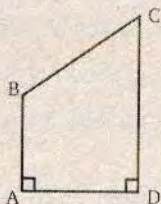


85. En un cuadrilátero ABCD se cumple:
* $m \angle BAC = m \angle BCA = m \angle ACD = \alpha$
* $m \angle ABD = 3\alpha$ y $m \angle CAD = 2\alpha$
Entonces: la $m \angle BCA$ es:

A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

86. En el trapecio ABCD, $AB = AD$, $BC = 10u$, $m \angle BCD = 45^\circ$. La suma de las distancias del vértice A hacia las rectas que contienen a los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ es:

A) $5u$
B) $10u$
C) $20u$
D) $5\sqrt{20}u$
E) $6\sqrt{19}u$



87. En un cuadrilátero convexo ABCD se cumple: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, $m \angle BCA = 30^\circ$
 $m \angle BAC = 3x$, $m \angle CAD = 4x$ y
 $m \angle ADB = 7x$. Halle x .

A) 6 B) 18 C) 9
D) 10 E) 12

88. Si en un polígono convexo el número de diagonales trazadas desde 5 vértices consecutivos es 69. Entonces, la relación entre el máximo número de ángulos internos agudos y el mínimo número de ángulos internos obtusos es:

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

89. En un cuadrilátero ABCD se cumple:
 $m\angle B = m\angle D = 90^\circ$ y $m\angle BCD = 30^\circ$.
 Se trazan las perpendiculares $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$
 a la diagonal $\overline{BD}$. Si $CQ - AP = \ell\sqrt{3}$,
 entonces la longitud de $\overline{BD}$ es:

A) ℓ B) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3\ell}{2}$
 D) 2ℓ E) $\frac{3\ell}{4}$

90. En un cuadrilátero convexo ABCD se
 verifica: $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. Si la $m\angle CBD = \phi$,
 $m\angle BAD = 60 + \phi$ y $m\angle ADB = 60 - 2\phi$,
 entonces la $m\angle CAD$ es:

A) 10° B) 15° C) 20°
 D) 25° E) 30°

91. En un cuadrilátero convexo ABCD:
 $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$, $m\angle BAC = 50^\circ$,
 $m\angle CAD = 30^\circ$ y $m\angle ADC > 90^\circ$.
 Entonces, la $m\angle ACD$ es:

A) 10° B) 12° C) 15°
 D) 20° E) 25°

92. En un cuadrilátero convexo ABCD,
 $AB = BC$, $AC = AD$
 $\frac{m\angle CBD}{9} = \frac{m\angle BAC}{2} = \frac{m\angle CAD}{6}$
 Calcule la $m\angle ADC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
 D) 72° E) 81°

93. Si la medida de cada ángulo interior
 de un polígono regular de n lados se
 disminuye en 5, su número de
 diagonales disminuye en $(5n - 3)$.
 Halle n .

A) 20 B) 22 C) 24
 D) 26 E) 28

94. Se tiene el cuadrado ABCD : $G \in \overline{BC}$,
 $F \in \overline{CD}$, $H \in \overline{AD}$, $E \in \overline{AB}$, $\overline{EF} \cap \overline{GH} = J$, la
 $m\angle EJG = 90^\circ$, $I \in \overline{JH}$ la $m\angle FEI = 60^\circ$, si
 $GJ = a$, $JH = b$ y $JF = c$. Halle EI

A) $\frac{(a+c-b)}{2}$ B) $2(a+b-c)$
 C) $2(a+c-b)$
 D) $\frac{b+c-a}{2}$ E) $\frac{a+b+c}{2}$

95. En un cuadrilátero ABCD:
 $AB = BC$, $AD = DB$
 $m\angle CAD = 2m\angle BAC = 2m\angle ACD$
 Halle $m\angle ACD$.

A) 15° B) 20° C) 25°
 D) 30° E) 10°

96. En un polígono convexo de n lados
 desde $(n-4)$ vértices consecutivos se
 han trazado $\left(\frac{n^2}{4} + 7\right)$ diagonales.
 Calcule el número de lados del
 polígono.

A) 8 B) 10 C) 12
 D) 14 E) 16

97. En un cuadrilátero convexo ABCD se verifica:

$$m\angle BAC = 15^\circ - \phi, m\angle CAD = 45^\circ - 3\phi,$$

$$m\angle ACD = 45^\circ + \phi, m\angle BDA = 60^\circ + 2\phi$$

$$\text{y la } m\angle BDC = 30^\circ.$$

Entonces la $m\angle ACB$ es:

- A) 18° B) 24° C) 30°
D) 36° E) 45°

98. Calcule el máximo número de rectas que pasan por n puntos.

- A) $n(n-1)$ B) n
C) $\frac{n(n-3)}{2}$
D) $\frac{n(n-1)}{2}$ E) $\frac{n(n-2)}{2}$

99. En un polígono regular cuyo semi-perímetro es p , el número que expresa su perímetro es el mismo que el que expresa su número de diagonales. Además la medida del ángulo interior es p veces la medida del ángulo exterior. ¿Cuánto mide el lado del polígono equiángulo?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

100. En un cuadrilátero convexo se cumple que $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, $m\angle BCA = 2m\angle CBD$ y $\overline{AB} \cong \overline{BD}$. Halle el menor valor entero de $m\angle ABD$, si $m\angle BDC < 34$

- A) 48 B) 50 C) 36
D) 45 E) 24

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución 1: Sea "n" el número de lados

Por dato :

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{2(n-3)(n-3-3)}{2}$$

$$n^2 - 15n + 36 = 0$$

$$\begin{array}{r} n \quad -12 \\ \quad \quad -3 \\ n \end{array}$$

$$(n-12)(n-3) = 0$$

$$n = 12$$

∴ El Polígono es el Dodecágono

Rpta.: E

Resolución 2: Por dato:

$$\# D_{5VC} = 9$$

Por fórmula:

$$5n - \frac{(5+1)(5+2)}{2} = 9$$

Efectuando:

$$\therefore n = 6$$

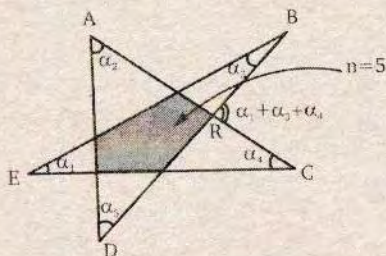
Rpta.: B

Resolución 3: Sea "n" el número de lados

Por Dato :

$$n = \#D$$

$$n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n = 5$$



$$\Delta ARD : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 4: # Diagonales trazadas desde 4 vértices consecutivos = 21.

Por propiedad:
$$n \cdot 4 - \frac{(4+1)(4+2)}{2} = 21$$

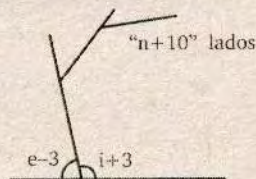
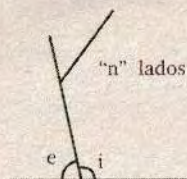
$$4n - 15 = 21$$

$$n = 9$$

∴ El polígono es un Nonágono.

Rpta.: D

Resolución 5:



$$e = \frac{360}{n} \quad \text{y} \quad e - 3 = \frac{360}{n + 10}$$

$$\Rightarrow \frac{360}{n} - 3 = \frac{360}{n + 10}$$

Efectuando: $\therefore n = 30$

Rpta.: D

Resolución 6: Dato: $i_1 - i_2 = 20^\circ$ ó $e_2 - e_1 = 20$

También: $e_2 + e_1 = 100^\circ$

$$e_2 = 60^\circ \quad \text{y} \quad e_1 = 40^\circ$$

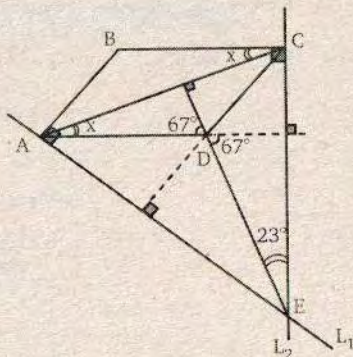
$$a) e_2 = 60^\circ = \frac{360^\circ}{n_2} \quad \therefore n_2 = 6$$

$$b) e_1 = 40^\circ = \frac{360^\circ}{n_1} \quad \therefore n_1 = 9$$

∴ # Lados: 6 y 9

Rpta.: B

Resolución 7:



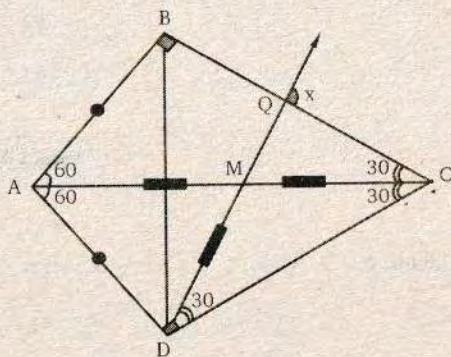
D : Ortocentro del ΔACE

$$x + 67^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 23^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 8:

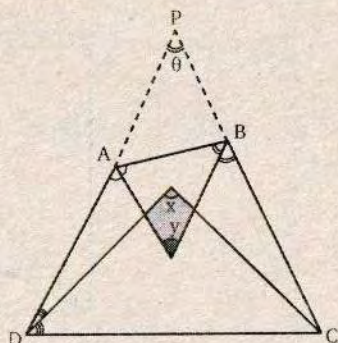

$$\triangle ADC : DM = AM = MC$$

$\triangle DMC$: ISÓSCELES

$$\Delta DQC : x = 90^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 11:



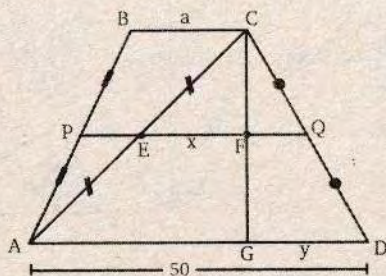
$$\triangle DPC : \quad x = 90 + \frac{\theta}{2}$$

$$\triangle APB : \quad y = 90 - \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore x + y = 180^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 12:



Piden: $2x + y$

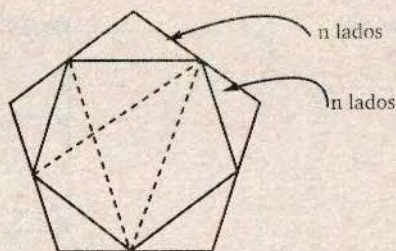
$\triangle ACG$: Base Media

$$AG = 2x$$

$$\therefore 2x + y = 50$$

Rpta.: D

Resolución 13:



$$\#D_M = \frac{n(n-1)}{2}$$

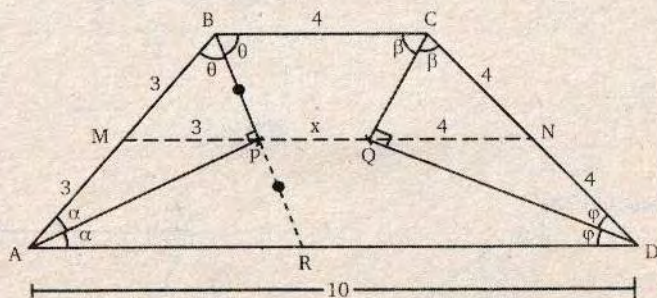
Sin considerar las diagonales medias consecutivas.

$$d'_M = \frac{n(n-1)}{2} - n$$

$$\therefore d' = \frac{n(n-3)}{2}$$

Rpta.: D

Resolución 14:



$\triangle BAR$: Isósceles

Sea $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$:

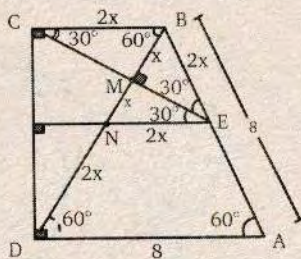
Por propiedad :

$$3 + x + 4 = \frac{10 + 4}{2}$$

$$\therefore x = 0$$

Rpta.: C

Resolución 15:



Por dato :

$$AB = AD$$

 $\Rightarrow \triangle ABD$ es equilátero

 $\triangle NBE$: equilátero

 $\triangle BCD$: $BD = 4x$

$$4x = 8$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: A

Resolución 16: "n": # de lados

$$\text{Dato: } \# D_M = 2\#D$$

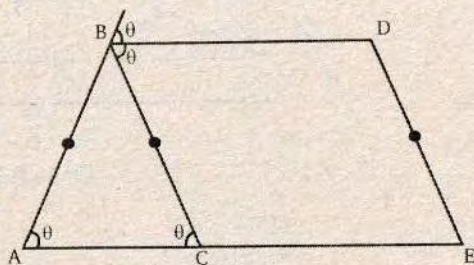
$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2 \cdot n(n-3)}{2}$$

$$n-1 = 2n-6$$

$$\therefore n = 5$$

Rpta.: C

Resolución 17:



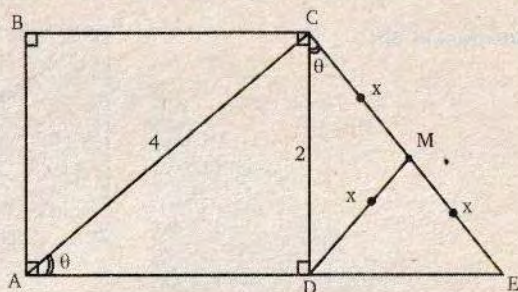
Sabemos que

$$\overline{BD} \parallel \overline{AE}$$

 $\therefore ABDE$ es un Trapecio Isósceles

Rpta.: D

Resolución 18:



$$\triangle ADC : \text{Notable} \quad \theta = 30^\circ$$

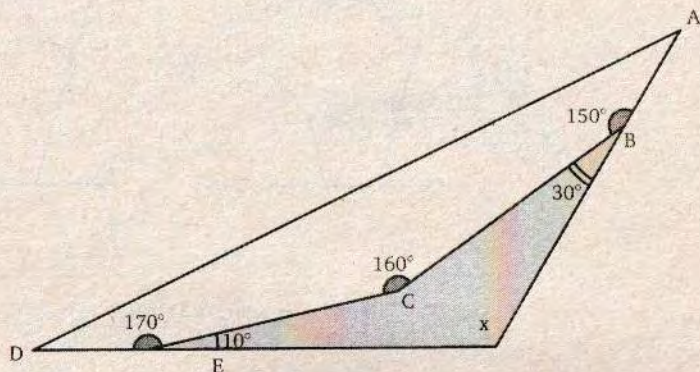
$$\triangle CDE : \quad CE = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$2x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Rpta.: D

Resolución 19:

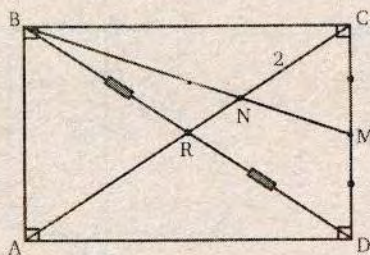


$$\triangle : x + 30 + 10 = 160$$

$$\therefore x = 120^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 20:



Unimos B y D: N Baricentro del $\triangle BCD$

$$CN = 2RN$$

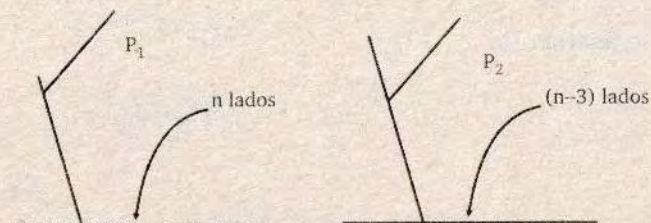
$$RN = 1$$

Pero : $AR = RC = 3$

$$\therefore AC = 6$$

Rpta.: B

Resolución 21:



$$\#D_1 = 4\#D_2$$

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(n-3)(n-6)}{2}$$

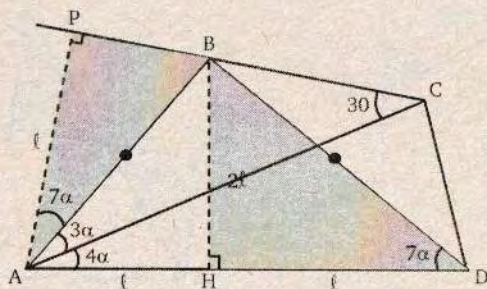
$$n = 4n - 24$$

$$n = 8$$

$\therefore$ El polígono es un octágono

Rpta.: D

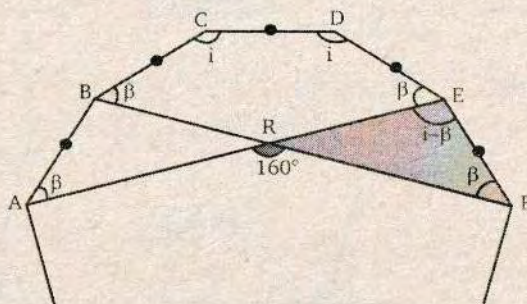
Resolución 22:



- $\triangle ABD$: Isósceles $AH = HD = \ell$
 Pero : $AC = 2\ell$
 $\triangle APC$: Notable $AP = \ell$
 $\triangle APB \cong \triangle BHD$
 $m \angle PAB = 7\alpha$
 $\triangle APC$: $10\alpha = 60^\circ$
 $\therefore \alpha = 6^\circ$

Rpta.: A

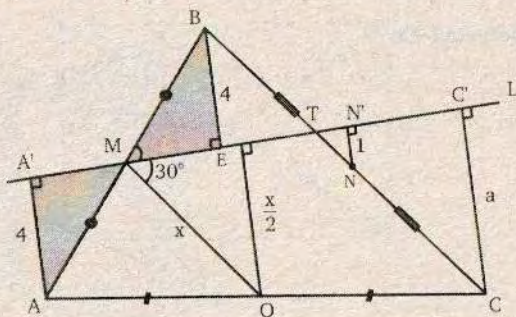
Resolución 23:



- $\triangle BCEF$: Trapecio Isósceles
 $\triangle ABDE$: Trapecio Isósceles
 $\triangle REF$: $i - \beta + \beta = 160$
 $i = 160 \rightarrow e = 20$
 $20 = \frac{360}{n}$
 $\therefore n = 18$

Rpta.: D

Resolución 24:



$$\triangle AA'M \cong \triangle BEM \text{ (ALA)}$$

$$BE = 4$$

Por propiedad: $1 = \frac{a-4}{2} \Rightarrow a = 6$

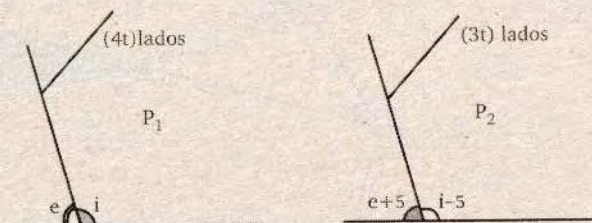
En el trapecio $AA'C'C$:

$$\frac{x}{2} = \frac{6 + 4}{2}$$

$$\therefore \bar{x} = 10$$

Rpta.: C

Resolución 25:



Piden $e = ?$

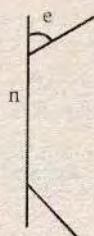
$$e = \frac{360}{4t}; \quad e + 5 = \frac{360}{3t}$$

$$\Rightarrow \frac{360}{4t} + 5 = \frac{360}{3t} \Rightarrow t = 6$$

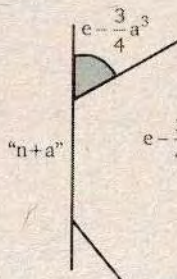
$$\therefore e = \frac{360}{4(6)} = 15^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 26:



$$e = \frac{360}{n}$$



"n+a"

$$e - \frac{3}{4}a^3 = \frac{360}{n+a}$$

Reemplazando: $\frac{360}{n} - \frac{3}{4}a^3 = \frac{360}{n+a}$

Operando: $a^2n(a+n) = 480$

Para $a = 2$: $\rightarrow n = 10$

Se pide: $Q = 2n + a$

$$Q = 2(10) + 2$$

$$\therefore Q = 22$$

Rpta.: B

Resolución 27:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Suma de ángulos} \\ \text{interiores} \end{array} \right) = 180(n-2)$$

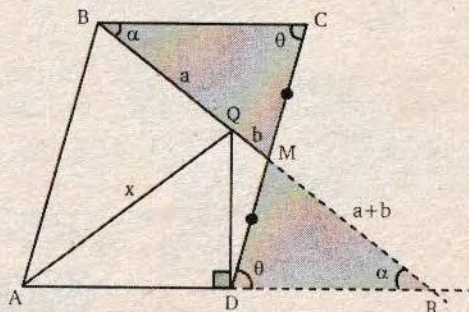
$$\Rightarrow \alpha + \alpha + r + \dots + \alpha + 8r = 180 \times 7$$

$$9\alpha + 36r = 1260$$

$$\therefore \alpha + 4r = 140^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 28:



$$\triangle BCM \cong \triangle DMR \text{ (ALA):}$$

$$DR = BC$$

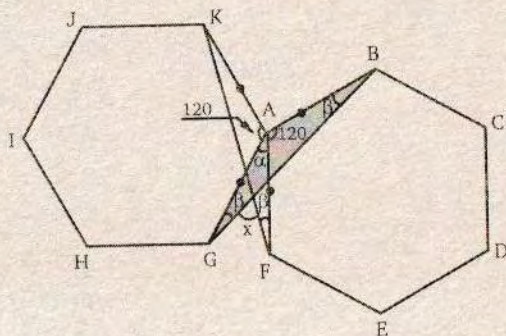
$\overline{DQ}$: Mediatriz de AR

$$x = QR$$

$$\therefore x = 2b + a$$

Rpta.: C

Resolución 29:



$$\triangle KAF \cong \triangle GAB \text{ (LAL)}$$

$$\hat{A} x = \alpha + 2\beta$$

$\triangle GAB$:

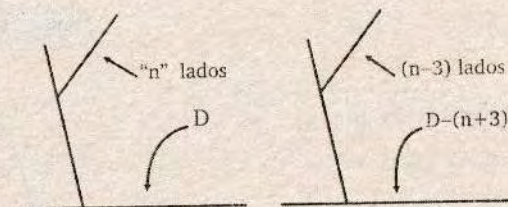
$$120 + \alpha + 2\beta = 180$$

$$\alpha + 2\beta = 60$$

$$\therefore x = 60$$

Rpta.: C

Resolución 30:



$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-3)(n-6)}{2} = n+3$$

$$n = 6$$

$\therefore$ El polígono es un hexágono.

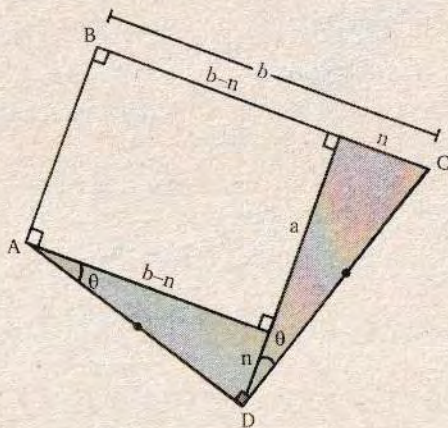
Rpta.: D

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 03

Trazamos $\overline{DP} \perp \overline{AB}$: $\triangle PBD$: Isósceles $\triangle PAD$: Equilátero $\triangle APC$: Isósceles $\rightarrow \triangle DPC$: Isósceles

$$20 + x = 80$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: D**Resolución 33:**Trazamos $\overline{DQ} \perp \overline{DH}$: $\triangle ADQ \cong \triangle DHC$ (ALA) $HC = DQ = n$; $AQ = DH = b - n$

Pero:

$$\overline{DH} = a + n$$

$$b - n = a + n$$

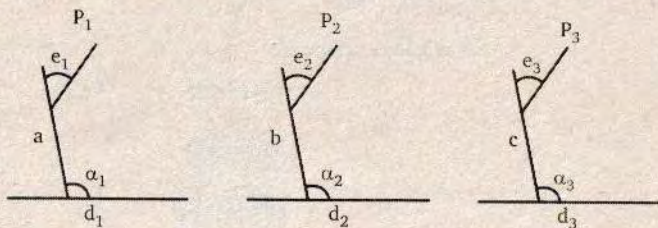
$$n = \frac{b - a}{2}$$

$$DH = a + \frac{(b - a)}{2}$$

$$\therefore DH = \frac{a + b}{2}$$

Rpta.: D

Resolución 34:



#s de lados : a, b y c

$$\frac{a(a-3)}{c(c-3)} = \frac{1}{6} \dots\dots(1)$$

$$b - a = 2 \dots\dots(2)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2}{3} \dots\dots(3)$$

Resolviendo el sistema:

$$a = 6 ; b = 8 \text{ y } c = 12$$

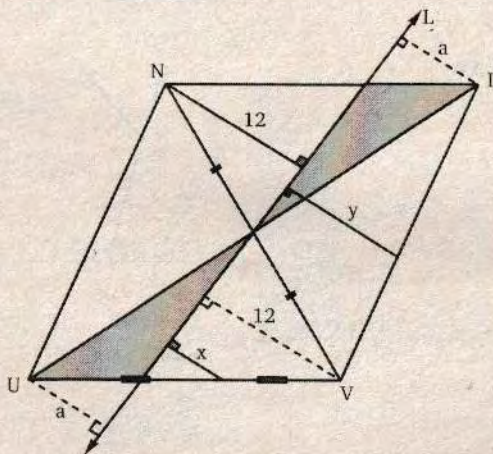
Se pide:

$$\alpha_1 = \frac{180(a-2)}{a}$$

$$\therefore \alpha_1 = 120^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 35:



Piden: $x + y = ?$

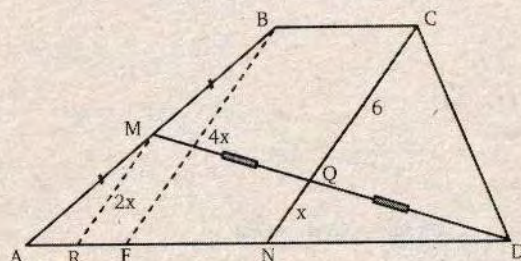
Por propiedad Trapecio:

$$x = \frac{12-a}{2} ; y = \frac{12+a}{2}$$

$$\therefore x+y = 12$$

Rpta.: E

Resolución 36:



Sea $\overline{MR} \parallel \overline{CN}$:

$\triangle RMD$: $MR = 2x$ (Base Media)

Trazamos: $\overline{BF} \parallel \overline{MR}$

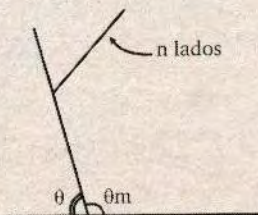
$\triangle ABF$: $BF = 4x$

$\square FBCN$: Romboide: $6 + x = 4x$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: A

Resolución 37:



Sabemos : $n\theta = 360^\circ \dots \dots (1)$

$nm\theta = 180(n-2) \dots \dots (2)$

$$(1) \div (2) : \frac{1}{m} = \frac{2}{n-2} \rightarrow n-2 = 2m$$

$$n = 2m + 2 \wedge \theta = \frac{180}{n+1}$$

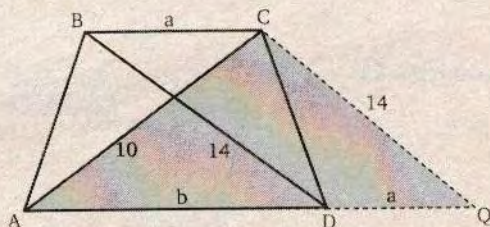
Si $m = 1$

$$\Rightarrow n = 4 \wedge \theta = 90^\circ$$

$$\therefore \# \text{ de lados} = 4$$

Rpta.: B

Resolución 38:



Sea x la Base Media:

$$x = \frac{a+b}{2} \dots (1)$$

Sea $\overline{CQ} \parallel \overline{BD}$

$\square DBCQ$: Romboide

$\triangle ACQ$:

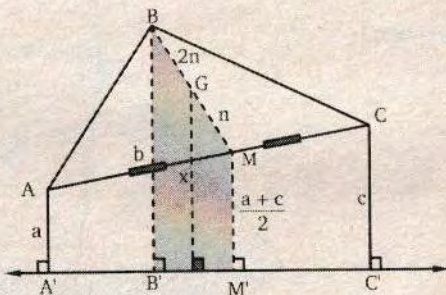
$$14 - 10 < 2x < 14 + 10$$

$$2 < x < 12$$

$$\therefore x_{\min. \text{ ent.}} = 3$$

Rpta.: C

Resolución 39:



Dato:

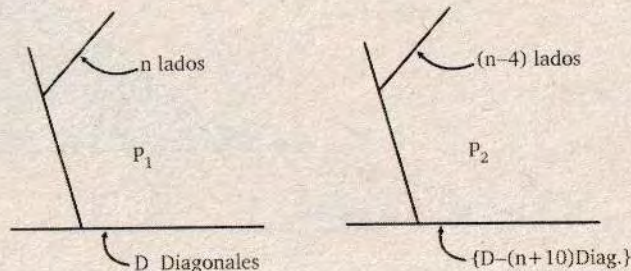
$$a + b + c = k$$

$$BG = 2(GM)$$

Trapezio BMM'B' :

$$x = \frac{bn + \left(\frac{a+c}{2}\right)2n}{2n+n}$$

$$\therefore x = \frac{a+b+c}{3} = \frac{k}{3}$$

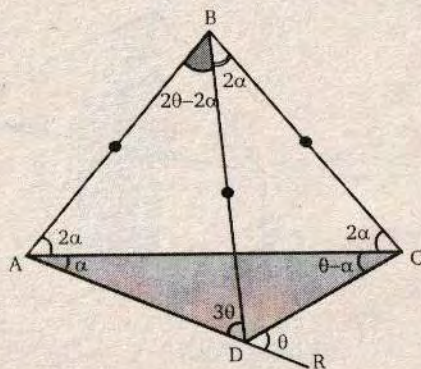
Rpta.: C**Resolución 40:**

Planteamos la ecuación:

$$\frac{(n-4)(n-4-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} - (n+10)$$

$$48 = 11n - 5n \rightarrow n = 8$$

$$\therefore \frac{n}{2} = 4$$

Rpta.: C**Resolución 41:**

POLÍGONOS - CUADRILÁTEROSB : Circuncentro del $\triangle ADC$:

$$m \angle ABD = 2\theta - 2\alpha$$

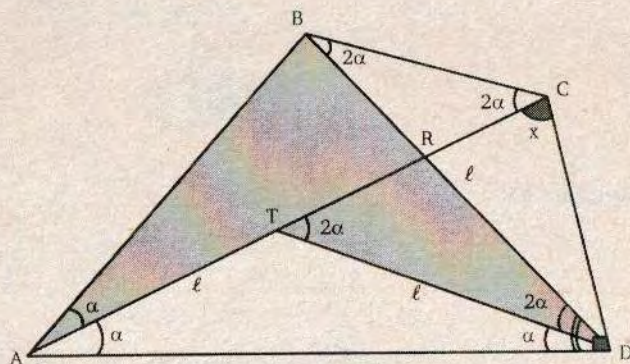
 $\triangle ADC$:

$$m \angle ACD = \theta - \alpha$$

$$m \angle CDR = \theta$$

$$3\theta + \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

Rpta.: C**Resolución 42:** $\triangle ATD$: Isósceles $\triangle TRD$: Isósceles $\triangle BRC$: Isósceles

$$\rightarrow TC = BD = \ell$$

 $\triangle ABDT$: Propiedad

$$m \angle ABD = 120 - \alpha$$

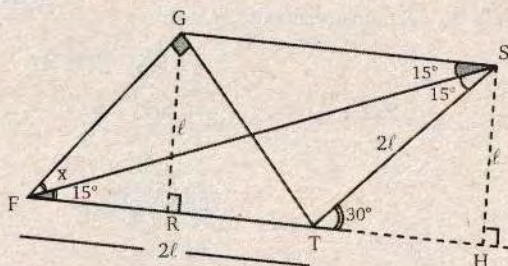
$$\alpha = 15^\circ$$

 $\triangle ADC$:

$$\therefore x = 75^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 43:



ΔFTS : Isósceles

ΔTHS : Notable de 30°

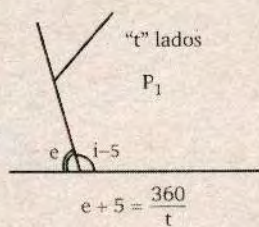
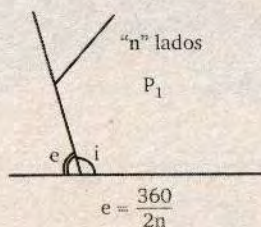
Pero $\overline{GS} \parallel \overline{FT} \rightarrow GR = l$

ΔFGT : $x + 15 = 45$

$\therefore x = 30^\circ$

Rpta.: C

Resolución 44:



$$\frac{360}{n} + 5 = \frac{360}{t}$$

$$1 = 72 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{n} \right)$$

$$tn = 72(n - t) \dots (1)$$

Dato:

$$\# D_2 = \# D_1 - (5n - 3)$$

$$\frac{t(t-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} - (5n-3)$$

$$t(t-3) = n^2 - 13n + 6 \dots (2)$$

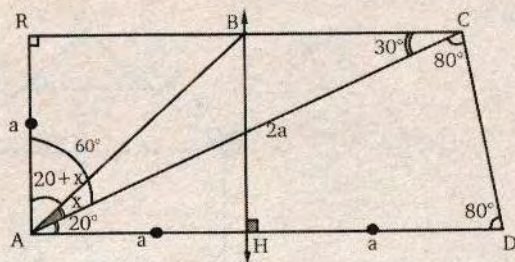
De (1) y (2):

$$n = 24 \text{ y } t = 18$$

$$\therefore n = 24$$

Rpta.: C

Resolución 45:



$\triangle CAD$: Isósceles: $AC = AD = 2a$

$\triangle ARC$: Notable $AR = a$

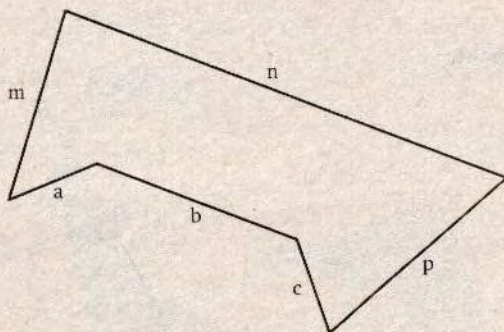
$\overline{AB}$: Bisectriz del $\angle RAH$

$\triangle ARC$: $20 + 2x = 60$

$$\therefore x = 20$$

Rpta.: D

Resolución 46:



Dato: $n - b = k$

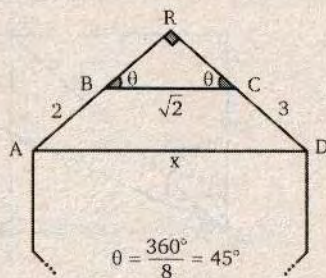
Por envolvente: $a + b + c < m + n + p$

$$a + c < m + p + \underbrace{n - b}_k$$

$$\therefore a + c < m + p + k$$

Rpta.: C

Resolución 47:



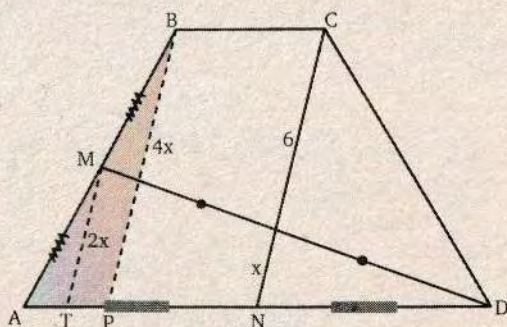
$\triangle BRC :$ $BR = RC = 1$

$\triangle ARD :$ $AB = 3$ y $RD = 4$

$\therefore x = 5$

Rpta.: B

Resolución 48:



Sea : $\overline{MT} \parallel \overline{CN} \rightarrow MT = 2x$

$\overline{BP} \parallel \overline{MT} \rightarrow BP = 4x$

$\square PBCN$: Romboide.

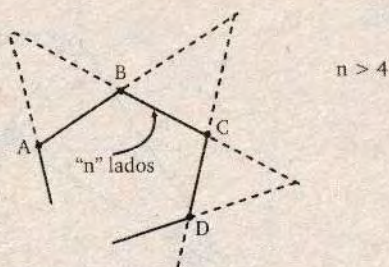
$4x = 6 + x$

$3x = 6$

$\therefore x = 2$

Rpta.: A

Resolución 51:



Por dato :

$$\frac{180(n-4)}{180(n-2)} = \frac{6}{7}$$

$$7(n-4) = 6(n-2)$$

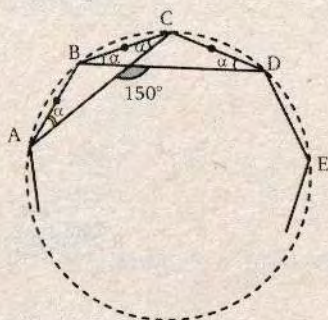
$$7n - 28 = 6n - 12$$

$$n = 16$$

$$\therefore \#D = \frac{16(16-3)}{2} = 104$$

Rpta.: D

Resolución 52:



$$\triangle ABC \cong \triangle BCD \text{ (LAL)}$$

$\triangle BQC$:

$$2\alpha + 150 = 180$$

$$\alpha = 15$$

$$\rightarrow e = 30^\circ$$

Pero :

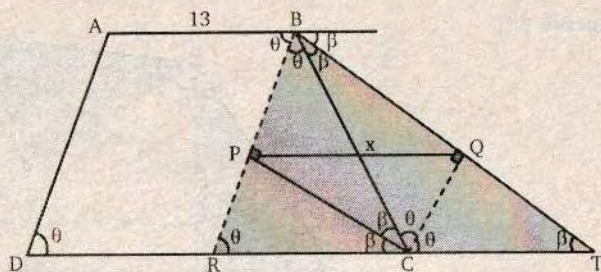
$$30^\circ = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow n = 12$$

$$\therefore \#D = \frac{12}{2}(12-3) = 54$$

Rpta.: D

POLÍGONOS - CUADRILÁTEROS

Resolución 53:



□ DABR : Paralelogramo

$$DR = 13 \text{ y } RC = 7$$

ΔRCB : Isósceles $\rightarrow BC = 7$

ΔBCT : Isósceles $\rightarrow CT = 7$

ΔRBT : Base Media

$$\therefore x = 7$$

Rpta.: D

Resolución 54: Sea "n" el número de lados

$$10 \# D_M = 17b \text{ (\# de lados)}$$

Donde b es entero.

$$10 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 17b \cdot n$$

$$5(n-1) = 17b$$

$$b = 5 \text{ y } n-1 = 17$$

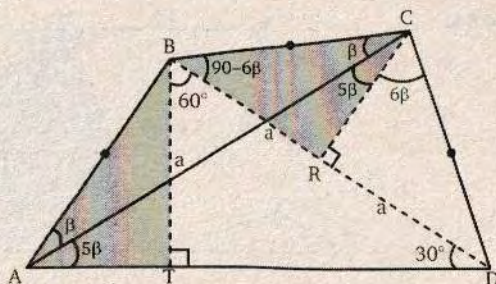
$$n = 18$$

$$S_{\angle \text{int.}} = 180(n-2) = 180(8-2)$$

$$\therefore S_{\angle \text{int.}} = 2880^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 55:



$\triangle BCD$: Isósceles

$\triangle ATB \cong \triangle BRC$: $BT = a$

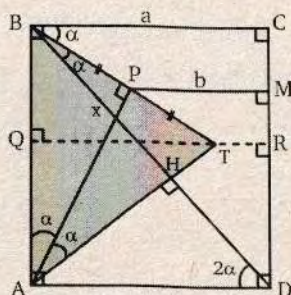
$\triangle BTD$: Notable de 30°

$\triangle CADR$: $10\beta + 30 = 90^\circ$

$$\therefore \beta = 6^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 56:



$\triangle BAT$: Isósceles $TQ = BH = x$

$$b = \frac{TR + a}{2} \rightarrow TR = 2b - a$$

Pero :

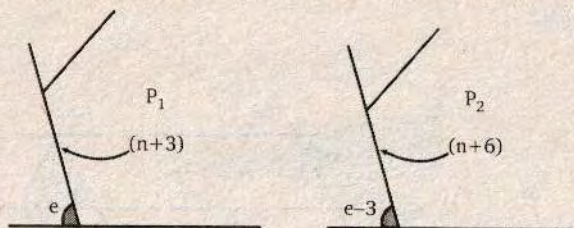
$$TR + x = a$$

$$b - a + x = a$$

$$\therefore x = 2(a - b)$$

Rpta.: C

Resolución 57:



$$e = \frac{360}{n+3} \dots\dots (1)$$

$$e-3 = \frac{360}{n+6} \dots\dots (2)$$

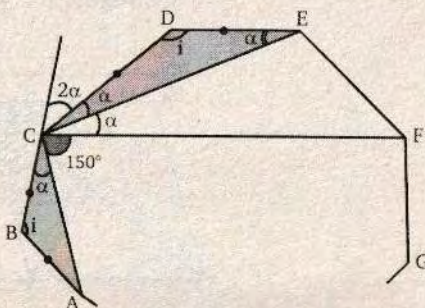
Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{360}{n+3} - 3 = \frac{360}{n+6}$$

$$\therefore n = 21$$

Rpta.: D

Resolución 58:



ΔCDE : Isósceles $\rightarrow e = 2\alpha$

Sabemos que: $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ y $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ (LAL)

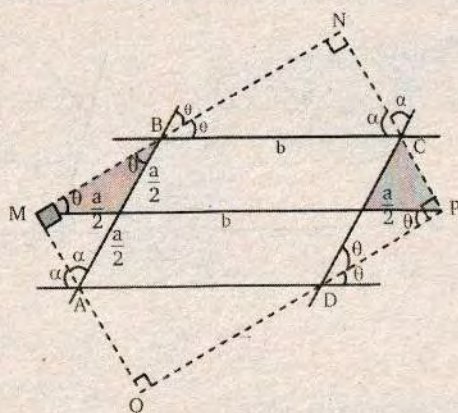
En "C": $5\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 6^\circ$

$$e = 12^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = 30$$

$$\therefore \#D_M = \frac{30(30-1)}{2} = 435$$

Rpta.: E

Resolución 59:



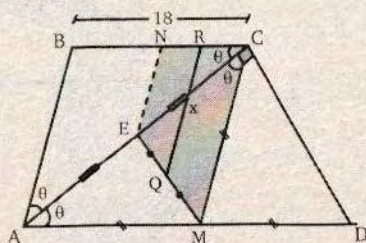
Sabemos que: $2\alpha + 2\theta = 180$
 $\alpha + \theta = 90^\circ$

MNPQ : Rectángulo $MP = \frac{a}{2} + b + \frac{a}{2}$

$\therefore MP = a + b$

Rpta.: A

Resolución 60:



Sea $\overline{EN} \parallel \overline{AB}$

$\triangle ABC$: Isósceles $\rightarrow EN = 9$

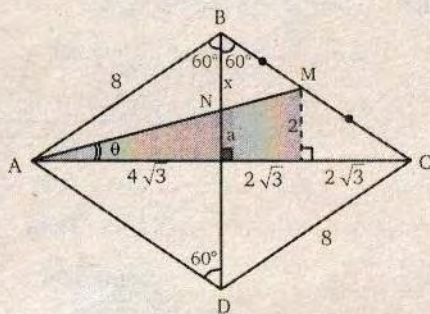
$\square ABCM$: Rombo $\rightarrow CM = 18$

$\triangle ENCM$: Trapecio

$$\therefore x = \frac{9 + 18}{2} = 13,5$$

Rpta.: B

Resolución 61:



$$\tan \theta : \frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{6\sqrt{3}}$$

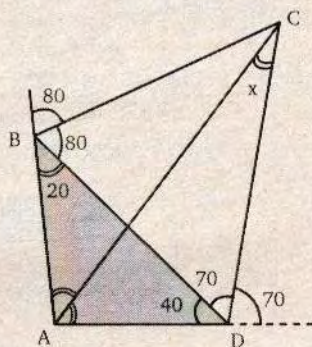
$$a = \frac{4}{3}$$

$$\text{Pero: } x = 4 - \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Rpta.: B

Resolución 62:



$\triangle ABD$: C es el excentro

$\rightarrow \overline{AC}$: Bisectriz Interna

$$x = \frac{m\angle ABD}{2} = \frac{20^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 63: Sea "n" el número de lados :

$$\sum e = 360^\circ \quad ; \text{ es decir}$$

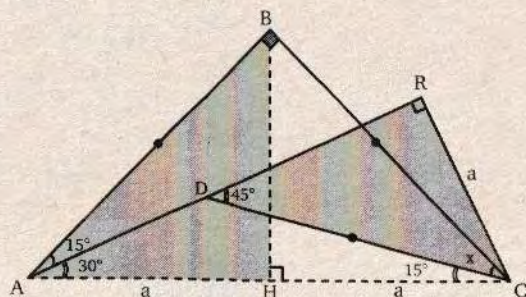
$$\underbrace{e_1 + e_2 + \dots + e_k}_{180K - S} + \underbrace{e_{(n-1)} + e_n}_x = 360^\circ$$

$$x = S - 180K + 360$$

$$\therefore x = S - 180(K - 2)$$

Rpta.: D

Resolución 64:



$\triangle ABC$: Isósceles

$AH = HC = a$

$\triangle ARC$: Notable 30°

$\rightarrow RC = a$

$\triangle AHB \cong \triangle DRC$

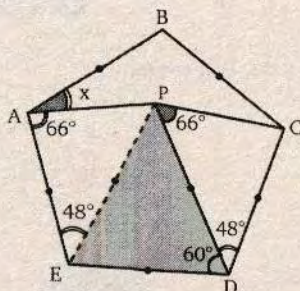
$m \angle RDC = 45$

$$15 + x = 45$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 65:



$\triangle PDC$: Isósceles

$$m\angle_{\text{Pentagono}} = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$$

$\triangle EPD$: Equilátero

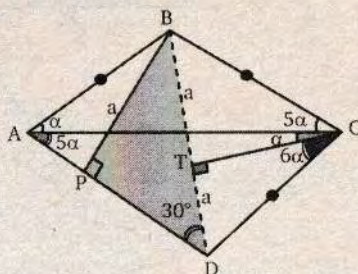
$\triangle AEP$: Isósceles

$$66 + x = 108$$

$$x = 42^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 66:



$\triangle BCD$: Isósceles

$$BT = TD = a$$

$\triangle BAD \cong \triangle CTD$

$$\therefore BP = a$$

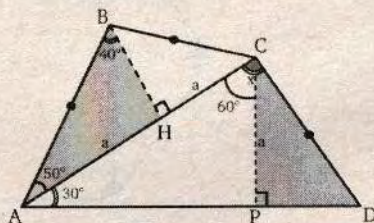
$\triangle BPD$: Notable de 30°

$$\triangle ACD : 16\alpha + 30 + 90 - 6\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 6^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 67:



$\triangle ABC$: Isósceles

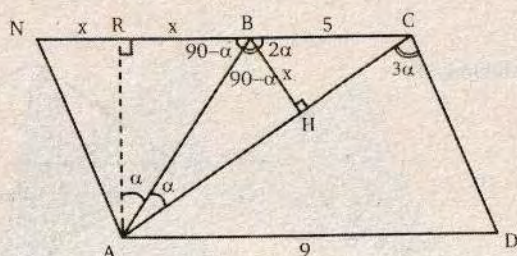
$$AH = HC = a$$

 $\triangle ACP$: Notable 30°

$$CP = a$$

 $\triangle BHA \cong \triangle CPD$: $\rightarrow m\angle PCD = 50^\circ$

$$\therefore x = 110^\circ$$

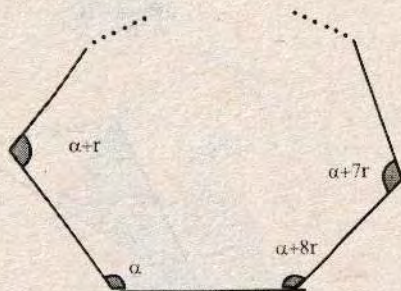
Rpta.: A**Resolución 68:** $\overline{BA}$: Bisectriz

$$RB = BH = x$$

Sea : $\overline{AN} \parallel \overline{CD}$ $\triangle NAB$: Isósceles $\square ANCD$: Romboide

$$2x + 5 = 9$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: D**Resolución 69:**

$$9\alpha + r(1 + 2 + \dots + 8) = 180^\circ (9 - 2)$$

$$9\alpha + r \left\{ \frac{8(8+1)}{2} \right\} = 180^\circ \times 7$$

$$\alpha + 4r = 140^\circ \dots\dots (1)$$

Pero : Si es convexo

$$\alpha + 8r < 180^\circ$$

De (1) :

$$\alpha = 140^\circ - 4r$$

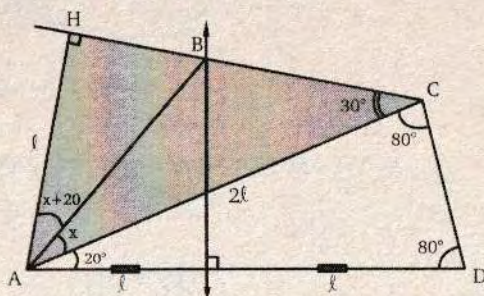
$$140 - 4r + 8r < 180^\circ$$

$$\rightarrow r < 10^\circ$$

$$\therefore r_{\max.} = 9^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 70:



$\triangle ADC$: Isósceles

$$AC = 2f$$

$\triangle AHC$: Notable de 30°

$$AH = f$$

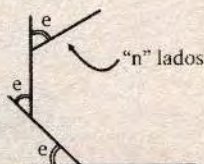
$\overline{AB}$: Bisectriz del ángulo HAD

$$\Rightarrow x + 20 + x = 60^\circ$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 71:



Si "i" es entero, entonces "e" también es entero

$$e = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow "n" \text{ es igual al número de divisores de } 360 :$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

$$\# \text{ De Divisores} = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$$

Pero $n \geq 3$ (No toma los valores 1 y 2)

$$\therefore \text{Valores enteros de } n = 22$$

Rpta.: C

Resolución 72: Por dato:

$$\frac{n(3n - 10)}{8} = 39$$

$$3n^2 - 10n - 39 \times 8 = 0$$

$$3n \quad \quad 26$$

$$n \quad \quad -12$$

$$(n - 12)(3n + 26) = 0$$

$$\rightarrow n = 12$$

El # de diagonales trazados desde los 3 primeros vértices no consecutivos es:

$$\therefore 9 + 8 + 7 = 24$$

Rpta.: C

Resolución 73: Sea "n" el número de lados

Por condición del problema

$$5n - \frac{6(7)}{2} + 1 + 2 + 3 = 125$$

$$\rightarrow n = 28$$

de Diagonales Medias:

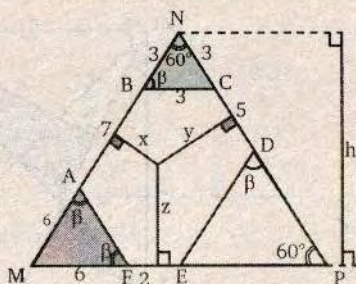
$$\#D_M = 3n - 6$$

$$D_M = 3(28) - 6$$

$$\therefore D_M = 78$$

Rpta.: A

Resolución 74:



$$\beta = \frac{360}{6} = 60^\circ$$

$\triangle MAF$, $\triangle BNC$ y $\triangle EDP$ son equiláteros.

$\square MEDN$: Trapecio Isósceles

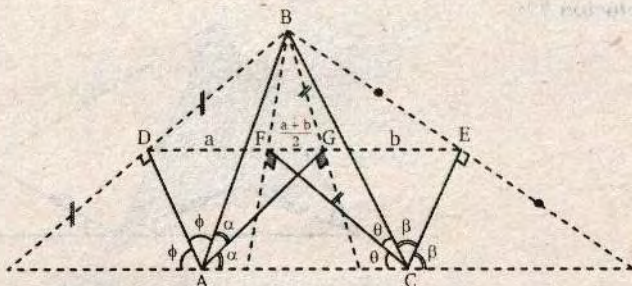
$$\therefore MF = 6$$

Pero : $x + y + z = h$

$$\therefore h = 8\sqrt{3}$$

Rpta.: B

Resolución 75:



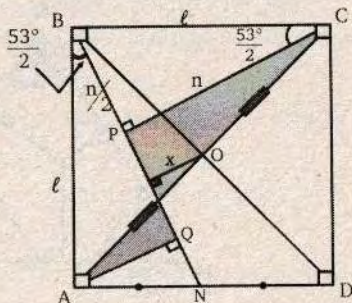
Por Base Media : D, F, G y E son puntos colineales

$$DE = a + \frac{a+b}{2} + b$$

$$\therefore DE = \frac{3}{2}(a+b)$$

Rpta.: C

Resolución 76:



Por propiedad: $x = \frac{CP - AQ}{2}$

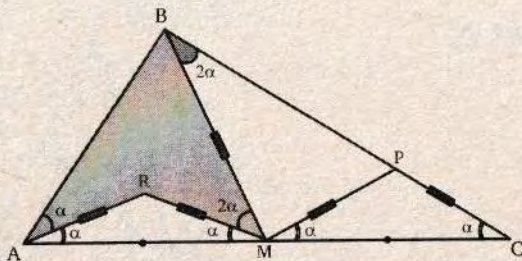
$$\triangle BPC \cong \triangle BQA \text{ (ALA)}$$

$$AQ = \frac{n}{2}$$

$$\therefore x = \frac{n - \frac{n}{2}}{2} = \frac{n}{4}$$

Rpta.: B

Resolución 77:



Sea: $\triangle MPC$: Isósceles y $\triangle BMP$: Isósceles

$$\triangle ARM \cong \triangle MPC \text{ (ALA)}$$

Δ ABMR : Propiedad

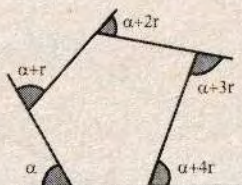
$$\text{in } \angle ABM = 120^\circ - \alpha$$

$$\rightarrow \triangle ABM: \quad 2\alpha + 3\alpha + 120^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 15^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 78:



$$S_{\Delta e} = 360^\circ = 5\alpha + 10r = 360^\circ$$

$$\alpha + 2r = 72^\circ$$

$$r = 36^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow r_{\max} \rightarrow \alpha = 2^\circ$$

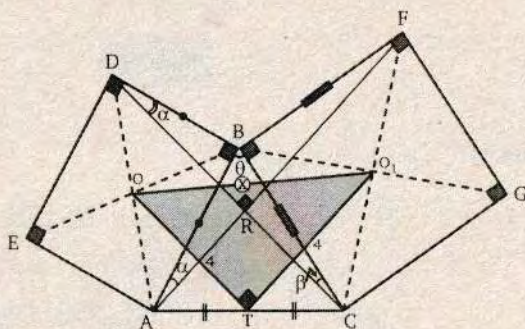
$$\therefore r = 35^\circ$$

$$\alpha + 4r = 2 + 4(35^\circ)$$

$$\therefore \alpha + 4r = 142^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 79:



$$\triangle ABF \cong \triangle DBC \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow AF = CD = 4$$

$$\triangle DBC : \alpha + \theta + \beta = 90^\circ$$

$$\triangle ABCR : m \angle ARC = 90^\circ$$

$$\triangle FAC : \text{Base Media}$$

$$O_1T = 4$$

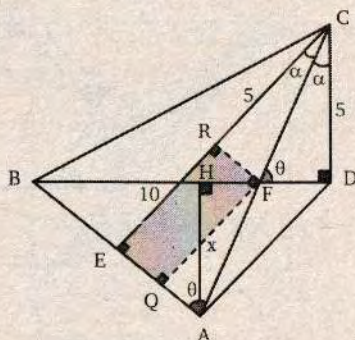
$$\triangle DCA : \text{Base Media}$$

$$OT = 4$$

$$\therefore \triangle OTO_1 : x = 4\sqrt{2}$$

Rpta.: C

Resolución 80:



$\triangle ABF$: Isósceles $FQ = AH$

$\overline{CF}$: Bisectriz
 $CD = CR = 5$

$\square ERFQ$: $x = 10$

Rpta.: B

Resolución 81: Por datos del problema :

$$2 \left\{ \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} \right\} = 3m + \sqrt[3]{n}$$

$$n^2 - n - n^2 + 3n = 3m + \sqrt[3]{m}$$

$$2n = 3m + \sqrt[3]{m}$$

$$\therefore m = \frac{2n - \sqrt[3]{n}}{3}$$

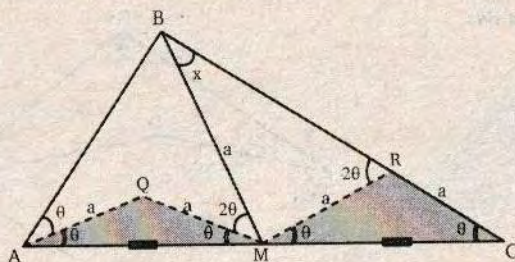
Para $n = 8$; m no es entero.

Para $n = 27$

Efectuando : $m = 17$

Rpta.: D

Resolución 82:



Por dato : $x = 2\theta$

$\triangle MRC$: Isósceles

$\triangle BMR$: Isósceles

$\triangle AQM \cong \triangle MRC$ (ALA)

ABMQ : Por Propiedad

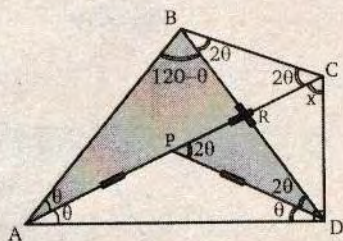
$m\angle ABM = 120^\circ - \theta$

$\therefore \triangle ABM : \theta = 15^\circ$

$x = 30^\circ$

Rpta.: B

Resolución 83:



$\theta + x = 90^\circ \dots\dots (1)$

$\triangle APD$: Isósceles

$\triangle BRC$: Isósceles

$\triangle PRD$: Isósceles

$\triangle ABDP$: Por Propiedad

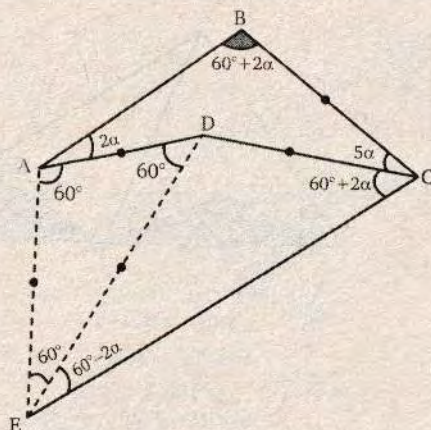
$m\angle ABD = 120^\circ - \theta$

$\therefore \theta = 15^\circ$

En (1) $x = 75^\circ$

Rpta.: E

Resolución 84:



Sea : $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$

$\square EABC$: Trapecio Isósceles

$\triangle DAE$: Equilátero

$\triangle EDC$: Isósceles

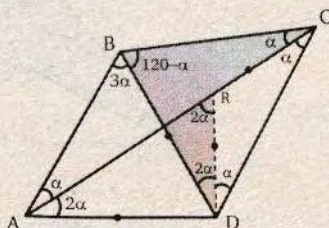
$\triangle$ Por ángulos conjugados :

$$60 + 2\alpha + 60 - 2\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 12$$

Rpta.: B

Resolución 85:



$\triangle ABD$: Isósceles

Trazamos $\overline{DR}$ tal que

$\triangle ADR$: Isósceles

$\triangle DRC$: Isósceles

$\triangle DBCR$: Por Propiedad

$$m \angle DBC = 120^\circ - \alpha$$

$$\therefore \alpha = 15^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 88: Dato : $\#D_{5VC} = 69$

Sea "n" el # de lados

$$5n - \frac{(5+1)(5+2)}{2} = 69$$

$$n = 18$$

Por propiedad : (# Máx. de $\angle$ s internos agudos) = 3

$\Rightarrow$ #Mín. de $\angle$ s internos obtusos es:

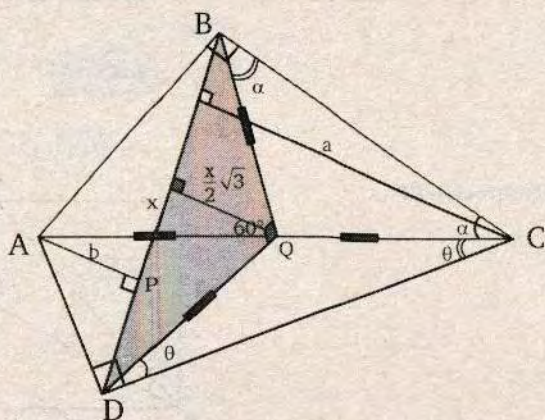
$$n - 3$$

$$\Rightarrow n - 3 = 15$$

$$\therefore \text{Razón : } \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Rpta.: E

Resolución 89:



Dato : $\alpha + \theta = 30^\circ$; $a - b = \ell\sqrt{3}$

$\triangle ABC$ y $\triangle ADC$: Mediana relativa a la hipotenusa

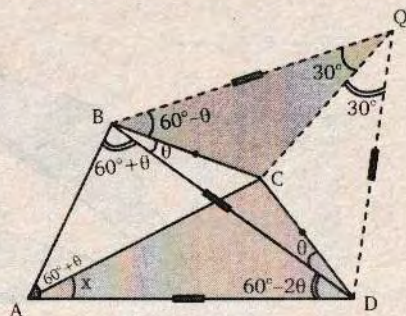
$\triangle BQD$: Equilátero

Propiedad Trapecio : $\frac{x}{2}\sqrt{3} = \frac{a-b}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore x = \ell$$

Rpta.: A

Resolución 90:



$\triangle BDA$: Isósceles $BD = AD$

Sea $\triangle BQD$ Equilátero

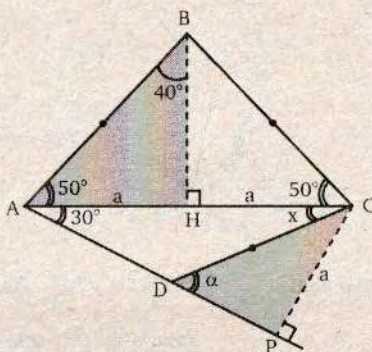
$\overline{OC}$: Bisectriz

$\triangle CBQ \cong \triangle ACD$ (LAL)

$$x = 30$$

Rpta.: E

Resolución 91:



$\triangle ABC$: $AH = HC = a$

$\triangle ACP$: Notable 30° $PC = a$

$\triangle AHB \cong \triangle DPC$

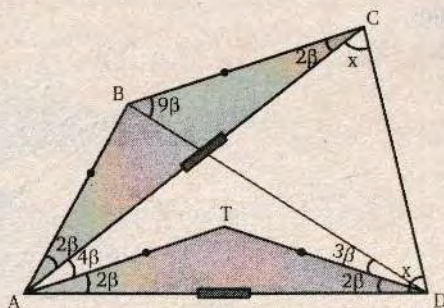
$$\therefore \alpha = 40^\circ$$

$\triangle ADC$: $30^\circ + x = 40^\circ$

$$x = 10^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 92:



$$\triangle ABC \cong \triangle ATD \text{ (LLL)}$$

$\triangle ABD$: Por propiedad

$$m \angle ABD = 120^\circ - 3\beta$$

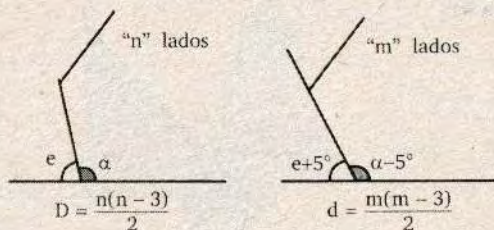
$$\triangle ABD: \beta = 6^\circ$$

$$\therefore \triangle ACD: 6\beta + 2x = 180^\circ$$

$$x = 72^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 93:



Por dato:
$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{m(m-3)}{2} = 5n - 3$$

$$m(m-3) = n^2 - 13n + 6 \dots (1)$$

De la figura:
$$e + 5^\circ = \frac{360^\circ}{m} \dots (2)$$

$$e = \frac{360^\circ}{n} \dots (3)$$

(3) en (2):
$$\frac{360^\circ}{n} + 5^\circ = \frac{360^\circ}{m}$$

$$mn = 72(n - m) \dots (4)$$

De (1) y (4): $\therefore n = 24$

Rpta.: C

Resolución 96: Sabemos:

$$D_{nv} = nv - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

Pordato:

$$D_{nv} = \frac{n^2}{4} + 7 \quad y \quad v = n - 4$$

Reemplazando:

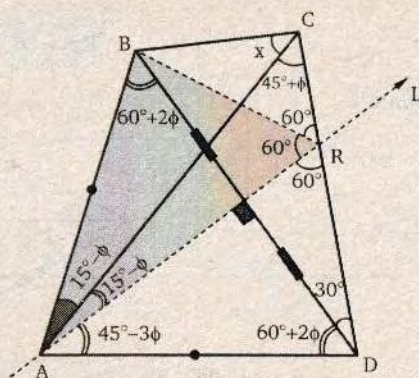
$$\frac{n^2}{4} + 7 = n(n-4) - \frac{(n-4+1)(n-4+2)}{2}$$

Operando:

$$\therefore n = 10$$

Rpta.: B

Resolución 97:



$\triangle ABD$: Isósceles

$\bar{L}$: Mediatriz de $\overline{BD}$

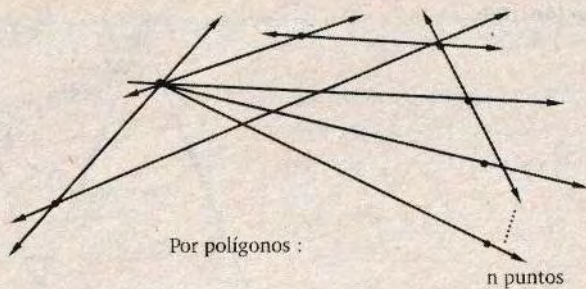
$\Rightarrow C$: es excentro del $\triangle BRA$

$$\therefore x = \frac{1}{2} m\angle BRA$$

$$x = 30^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 98:



Por polígonos :

$$N = n + \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\therefore N = \frac{n(n-1)}{2}$$

Rpta.: D

Resolución 99:

Por dato :

$$2p = \frac{n(n-3)}{2} \dots\dots (1)$$

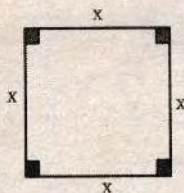
$$\frac{180(n-2)}{n} = p \left(\frac{360}{n} \right) \dots\dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$n = \frac{n(n-3)}{2} + 2$$

Efectuando :

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ \rightarrow p &= 1 \end{aligned}$$

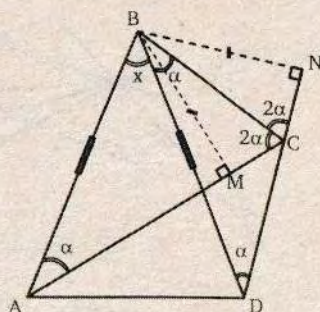


$$4x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}$$

Rpta.: B

Resolución 100:



$$\triangle AMB \cong \triangle DNB \text{ (Caso : L - L - L)}$$

$$\triangle ATB : \quad \alpha + 3\alpha + x = 180^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ - \frac{x}{4}$$

$$\text{Pero :} \quad \alpha < 34^\circ \text{ (Dato)}$$

$$45^\circ - \frac{x}{4} < 34^\circ$$

$$\rightarrow x > 44^\circ$$

$$\therefore x_{\text{Min. Ent.}} = 45^\circ$$

Rpta.: D

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determine el valor de verdad (V o F) de las proposiciones:

- I. Un cuadrilátero de diagonales congruentes, es un rectángulo.
 II. Un cuadrilátero de diagonales perpendiculares, es un trapezoide simétrico.
 III. Un cuadrilátero de lados congruentes es un rombo.

A) FFF B) FFV C) FVV
 D) VVV E) VFV

2. En un paralelogramo ABCD, por los vértices A y C se trazan perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, las que se intersectan en F. Halle la $m\angle ADF$, si $m\angle DFC = 16$

A) 106 B) 105 C) 104
 D) 103 E) 102

3. Si un polígono convexo de n lados tuviera 3 lados menos, entonces tendría $(n+3)$ diagonales menos, calcule n .

A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 8

4. En un polígono regular ABCDEF... $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ determinan un ángulo de medida 160. Halle el número de lados de dicho polígono regular.

A) 12 B) 15 C) 16
 D) 18 E) 20

5. En el interior de un cuadrado ABCD se ubica el punto F tal que: $AB = BF$, $m\angle AFD = 75$, calcule la $m\angle FBD$.

A) 10 B) 12 C) 15
 D) 18 E) 20

6. Halle el número de lados de dos polígonos regulares, siendo la diferencia del número de lados, 2 y la diferencia de las medidas de los ángulos exteriores 6.

A) 4 y 6 B) 5 y 7 C) 6 y 8
 D) 7 y 9 E) 10 y 12

7. Al multiplicar por K el número de lados de un polígono convexo, su número de diagonales queda multiplicado por 6K. Halle el número de diagonales de dicho polígono.

A) 10 B) 30 C) 60
 D) 80 E) 90

8. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), P y Q son: puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Además $\overline{AC} \cap \overline{PQ} = \{E\}$,

$\overline{PQ} \cap \overline{BD} = \{F\}$,

la prolongación de $\overline{CF}$ intercepta a $\overline{AD}$ en G. Si $BC = a$ y $AD = 50$, entonces $(2EF + GD)$ es:

A) $\frac{50+a}{5}$ B) $\frac{50+a}{3}$ C) $\frac{100+a}{3}$
 D) 50 E) 40

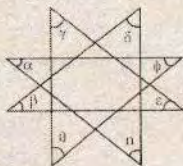
9. En un polígono regular ABCDEF de n lados, halle la medida de ángulo que determinan $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

A) 30° B) $\frac{180^\circ}{n}$
 C) $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$
 D) $\frac{360^\circ}{n}$ E) $\frac{90^\circ(n-2)}{n}$

10. En un trapecio UNIV, $UV = 2NI$, $UV \parallel NI$, $R \in \overline{IV}$, F y S son puntos medios de $\overline{NU}$ y $\overline{UR}$ respectivamente. Si $FU = 18$, halle FS.

A) 9u B) 18u C) 22u
 D) 26u E) 32u

11. En la figura mostrada, halle:
 $(\alpha + \beta + \gamma + \theta + \delta + \phi + \epsilon + n)$



A) 180° B) 360° C) 720°
 D) 760° E) 810°

12. En un trapecio la diferencia de la longitud de la mediana y del segmento que une los puntos medios de las diagonales es 12. Halle la longitud de la base menor.

A) 6 B) 8 C) 10
 D) 12 E) 14

13. En un trapecioide simétrico ABCD ($BD > AC$) las diagonales se intersecan en O, tal que $OD = 3(OB)$. Calcule la distancia de O a la recta que contiene al vértice A, si las distancias de los vértices B y D a dicha recta miden 3 y 2 respectivamente.

A) 1,75 B) 2,75 C) 1,25
 D) 2,25 E) a y b

14. Se tiene un cuadrilátero ABCD en el cual: $m\angle BAD = 30^\circ$, $m\angle ABC = 150^\circ$, $m\angle BCD = 120^\circ$, $BC = 10$ y $CD = 12$. Halle AD.

A) 34 B) 32 C) 30
 D) 28 E) 26

15. En un triángulo ABC por el punto medio M de $\overline{AB}$ se traza una recta secante L que intercepta a $\overline{BC}$ en T. Las distancias trazadas desde el vértice A y del punto medio de $\overline{BC}$ a la recta L miden: 4u y 1u respectivamente. Si $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$ y $m\angle QMT = 30^\circ$. ($Q \in \overline{AC}$) entonces la longitud (en u) de $\overline{MQ}$ es

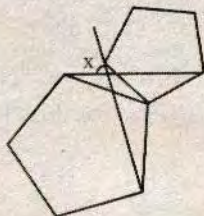
A) 3 B) 4 C) 6
 D) 8 E) 5

16. En un rombo ABCD, $AC = 8$, $BD = 6$. M, N, P son puntos en las prolongaciones de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$. La $m\angle MPN = 90^\circ$, $C \in \overline{MN}$, $MN \perp \overline{AC}$. Halle $AP + MN$

A) 18 B) 20 C) 26
 D) 28 E) 30

17. En la figura se muestra dos pentágonos regulares. Halle x .

A) 60
B) 72
C) 75
D) 78
E) 80



18. En un polígono regular ABCDEF de n lados, la $m \angle ACE = 135$. Calcule el número de diagonales medias

A) 78 B) 91 C) 105
D) 120 E) 136

19. ABCD es un trapecioide. Se traza

$$\overline{CH} \perp \overline{AD} \text{ (H} \in \overline{AD} \text{) y } AH = \frac{AD}{2}.$$

$$\text{Si } m \angle CDA = 75^\circ, m \angle BAD = 90^\circ.$$

Halle la $m \angle HCA$.

A) 15 B) 30 C) 37
D) 45 E) 60

20. Si el número de lados de un polígono regular se duplica, su número de diagonales aumenta en 234. ¿En qué intervalo se encuentra la medida de su ángulo exterior?

A) (12; 15) B) (21; 24)
C) (27; 30)
D) (18; 21) E) (24; 27)

21. ABCD es un paralelogramo ($AB < BC$). Se traza $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$, tal que N y M son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$.

$$\{P\} = \overline{CM} \cap \overline{BD}, \{Q\} = \overline{BN} \cap \overline{AC},$$

$$\{R\} = \overline{AQ} \cap \overline{BM}, T \text{ es punto medio de } \overline{AB} \text{ y } \{S\} = \overline{BD} \cap \overline{CT}$$

Si $AB = m$ y $QP = n$. Halle RS

A) $\frac{2m - n}{2}$ B) $\frac{m - n}{2}$

C) $\frac{m + n}{2}$

D) $\frac{2m - n}{3}$ E) $\frac{3n + m}{6}$

22. ABCD es un trapecio tal que:

$$m \angle A + m \angle D = 90$$

$$(\overline{BC} \parallel \overline{AD}, BC < AD)$$

Si M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente y $m \angle D = 40^\circ$, halle la $m \angle MNA$

A) 60 B) 66 C) 70
D) 76 E) 80

23. Desde $(n - 4)$ vértices consecutivos de un polígono convexo de n lados, se trazan $(4n + 3)$ diagonales. Calcule n .

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

24. En un polígono convexo de n lados ($n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$), desde $(n - 9)$ vértices consecutivos se trazan $(3n - 2)$ diagonales. Entonces, el número de lados del polígono es:

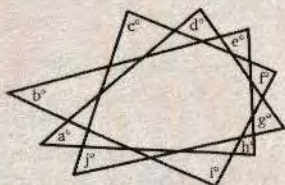
A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

25. Cuánto debe medir uno de los ángulos obligatoriamente de un nonágono conociendo que todos sus ángulos interiores se encuentran en progresión aritmética.

A) 100 B) 120 C) 130
D) 140 E) 150

26. Si: $a + b + c + d = 3x$
 $e + f + g = 5x$
 $h + i + j = 4x$

Halle: x



A) 60 B) 40 C) 45
D) 50 E) 70

27. Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 21 diagonales desde 4 vértices consecutivos.

A) Octágono B) Nonágono
C) Decágono
D) Pentadecágono E) Icoságono

28. En un polígono regular, al disminuir en 10 la medida de cada ángulo interior, resulta otro polígono regular que tiene 81 diagonales menos. Halle la medida del ángulo exterior del primer polígono.

A) 15 B) 18 C) 20
D) 24 E) 30

29. En un paralelogramo ABCD, se ubican M punto medio de $\overline{CD}$ y N en la prolongación de $\overline{CB}$ tal que: $\overrightarrow{AN} \cap \overrightarrow{MB} = \{Q\}$ y $m\angle AQM = 90^\circ$. $\overline{QD}$ intercepta a $\overline{CN}$ en E y $\overline{AB}$ en F. $AD = 16u$; $NE = 4u$; $FD = 9u$. Halle la longitud de $\overline{EF}$ (en u).

A) 2 B) 3 C) 4
D) 4,5 E) 5

30. En un paralelogramo ABCD, sus lados miden $AB = a$ y $BC = b$. Entonces, la longitud de la diagonal del cuadrilátero que se forma al trazar las bisectrices exteriores del paralelogramo es:

A) $a + b$ B) $\frac{ab}{a + b}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $a - b$ E) $b - a$

31. ¿Cuántos polígonos equiángulos convexos existen de modo que la medida de su ángulo interno en grados sexagesimales esta representado por un número entero?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

32. Sea ABCD un cuadrilátero, donde: $\overline{BC} \parallel \overline{AC}$; $P \in \overline{BC}$, $\overline{AP}$ es bisectriz del ángulo BAD; suponga también que $\overline{DC}$ es bisectriz exterior del ángulo D del triángulo ABD. Si $\overline{BD} - \overline{AB} = 3$, determine la longitud de $\overline{PC}$.

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

33. En un triángulo ABC, desde el vértice B se trazan las perpendiculares $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ a la bisectriz interior del ángulo A y a la bisectriz exterior del ángulo C. Si p es el semiperímetro del triángulo ABC y $AB = c$, entonces PQ es:

A) $p + c$ B) $p - c$ C) c
D) $p - 3c$ E) $p - 2c$

34. En un paralelogramo ABCD los lados miden $AB = a$ y $BC = b$. Halle la longitud de la diagonal del cuadrilátero que se determina al trazar las cuatro bisectrices exteriores del paralelogramo.

A) $(a + b)$ B) $2(a + b)$
C) $(2a + b)$
D) $(a + 2b)$ E) $(3a + b)$

35. En un cuadrilátero RTSF:
la $m\angle TRS = m\angle FRS = 12$
 $m\angle TSR = 39$, $m\angle RSD = 18$, se ubica en RS el punto H de modo que $m\angle THS = 90$, $HS = 2u$. Calcule FS (en u)

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

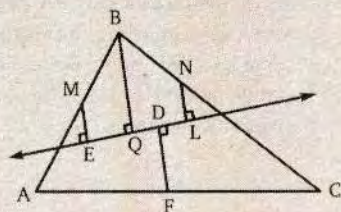
36. En un paralelogramo ABCD, M es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{DH} \perp \overline{MC}$ ($H \in \overline{MC}$), P y Q son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{DH}$. Si $BC = 36u$. Halle PQ. (en u)

A) 16 B) 18 C) 20
D) 17,5 E) 17

37. En un triángulo ABC por el punto medio M de $\overline{AB}$ se traza una recta secante L que intercepta a $\overline{BC}$ en T. Las distancias trazadas de A y el punto medio de $\overline{BC}$ a L miden $4u$ y $1u$ respectivamente. Halle la longitud de $\overline{MQ}$ ($\overline{AQ} \cong \overline{QC}$), si $m\angle QMT = 30$

A) 3 B) 4 C) 6
D) 10 E) 5

38. En la figura M, N y F son puntos medios de los lados del triángulo ABC, $ME = a$, $FD = b$, $NL = c$. Calcule BQ.



A) $a + b + c$ B) $a + b - c$
C) $a - b + c$
D) $2a - b - c$ E) $2a + b - c$

39. Exteriormente a un paralelogramo ABCD, se construyen los cuadrados con los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ cuyos centros son respectivamente O_1 , O_2 y O_3 , si $\overline{O_1O_3} = d$. Halle la distancia de O_2 a $\overline{O_1O_3}$

A) $\frac{d}{4}$ B) $\frac{d}{3}$ C) $\frac{d}{2}$
D) d E) $\frac{3d}{2}$

40. Se tiene un triángulo ABC y una recta L exterior al triángulo. Luego se trazan las perpendiculares $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ a la recta L.

Si $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = K$, entonces la longitud de la perpendicular trazada desde el baricentro G de la región triangular ABC a la recta L es:

- A) $\frac{K}{2}$ B) $\frac{2K}{3}$ C) $\frac{K}{3}$
D) $\frac{3K}{5}$ E) $\frac{5K}{3}$

41. Las medidas de los ángulos interiores de un pentágono convexo está en progresión aritmética. Si la razón de la progresión es el mayor valor entero. Calcule la medida del menor ángulo del pentágono.

- A) 31 B) 32 C) 36
D) 38 E) 43

42. Determine el valor de verdad de:

- I. En el plano, la reunión de cuatro segmentos de manera que en cada extremo sólo concurren dos segmentos, siempre es un cuadrilátero.
II. En todo paralelogramo, las diagonales se bisecan.
III. En todo rombo y en todo cuadrado, sus diagonales se interceptan perpendicularmente.
IV. En el rombo y en el cuadrado sus lados son congruentes.

- A) FVFFV B) FFFVV C) VVVV
D) VVVV E) FVVV

43. En un trapecio rectángulo ABCD (ángulos rectos en A y D) las bisectrices interiores de B y C interceptan en E. Desde E se traza $\overline{EF}$ perpendicular a $\overline{AD}$ (F en $\overline{AD}$); si la mediana mide 10u y $\overline{BC}$ mide 17, halle EF. (en u)

- A) 1,2 B) 1,8 C) 1,6
D) 1,5 E) 2

44. En un polígono regular, al disminuir en 10 la medida del ángulo interior, se obtiene la medida del ángulo interior de otro polígono regular cuyo número de lados es $\frac{2}{3}$ del número de lados del polígono inicial. Halle el número de lados del polígono regular inicial.

- A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

45. En el cuadrilátero ABCD:

$m\angle DAB = m\angle BCD = 90^\circ$, $BC = CD$
Halle AC sabiendo que la distancia de C a $\overline{AD}$ es 2.

- A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{8}$

46. Desde (n-5) lados consecutivos de un polígono de n lados se trazan $(6n+5)$ diagonales medias. Calcule el número total de diagonales de este polígono.

- A) 65 B) 77 C) 90
D) 104 E) 119

47. En un polígono regular ABCD, las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ determinan un ángulo de medida 126. Halle cuántas diagonales se pueden trazar desde 8 vértices consecutivos.

A) 108 B) 100 C) 106
D) 112 E) 115

48. Si se aumenta en 10, el número de lados de un polígono regular de n lados, la medida de su ángulo interior se incrementa en 3. Halle la suma de las medidas de los ángulos interiores de la estrella formada al prolongar los lados del polígono original.

A) 4680 B) 4690 C) 4700
D) 4710 E) 4720

49. En un trapecio las diagonales miden 8cm y 12cm. Calcule el máximo valor entero de la mediana. (en cm)

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

50. Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior mide $(P + 15)$ veces el valor del ángulo exterior; y además se sabe que el número de diagonales es $135P$.

A) 10 B) 18 C) 36
D) 90 E) 125

51. En un cuadrilátero ABCD se cumple que: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$,

$$m \angle BAD = 60$$

$$m \angle CAD = 14$$

$$m \angle BCA = 30$$

Halle la $m \angle BDC$.

A) 90 B) 88 C) 92
D) 86 E) 94

52. Desde $\frac{n}{2}$ vértices consecutivos de un polígono convexo de n lados se trazan $\left(\frac{n^2}{4} + 4\right)$ diagonales. Halle el número de diagonales medias del polígono.

A) 36 B) 45 C) 55
D) 66 E) 78

53. Decir cuales son verdaderos:

- I. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares y congruentes el cuadrilátero es un cuadrado.
- II. Si las diagonales de un trapecio son congruentes, el trapecio es isósceles.
- III. Las bisectrices interiores de un romboide determinan un rectángulo.

A) I, II B) I, III
C) II, III
D) Solo I E) I, II, III

54. En un torneo de ajedrez se jugaron 345 partidos en total. En la primera parte jugaron todos contra todos y en la segunda parte jugaron los 10 primeros. ¿Cuántos jugadores participaron?

A) 15 B) 20 C) 25
D) 30 E) 35

55. En un polígono convexo de n lados desde $(n-4)$ vértices consecutivos se han trazado $\frac{n^2}{4} + 7$ diagonales. Calcule el número de lados del polígono.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 14

56. En un cuadrilátero convexo ABCD las diagonales se interceptan en Q.

$$\text{Si } \overline{AB} \cong \overline{QC}, m\angle BAC = 40^\circ,$$

$$m\angle BCD = 50^\circ \text{ y } m\angle ACD = 20^\circ.$$

Halle $m\angle BDC$.

A) 45° B) 55° C) 65°
D) 70° E) 80°

57. Se tiene el cuadrilátero ABCD, de diagonales perpendiculares $m\angle BAC = 20^\circ$, la $m\angle DAC = 10^\circ$, $m\angle BCA = 50^\circ$. Halle la $m\angle BDC$.

A) 60 B) 50 C) 30
D) 40 E) 45

58. Si un polígono convexo de n lados, ($n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$) tuviera $(n-3)$ lados, tendría $(n+3)$ diagonales menos. Entonces, el polígono es un

A) Triángulo B) Cuadrilátero
C) Pentágono
D) Hexágono E) Octógono

59. Si se aumenta en 10 el número de lados de un polígono regular de n lados ($n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$), la medida de su ángulo interior se incrementa en 3. Entonces, la suma de las medidas de los ángulos en los vértices de la estrella formada al prolongar los lados del polígono original es:

A) 4680 B) 4690 C) 4700
D) 4710 E) 4720

60. El número de diagonales que se pueden trazar desde 5 vértices consecutivos de un polígono convexo está comprendida entre 91 y 101, entonces en el polígono de mayor número de lados la suma de las medidas de la mayor cantidad de ángulos obtusos es siempre mayor que:

A) 9180° B) 8109° C) 1089°
D) 1890° E) 1980°

61. ABCD es un cuadrilátero tal que: $m\angle BAD = m\angle BDA = 60^\circ$, $m\angle DBC = 45^\circ$, $m\angle BCA = 30^\circ$. Halle $m\angle BDC$

A) 45 B) 60 C) 70
D) 72 E) 90

62. ¿Cuántos polígonos equiángulos convexos cuyos ángulos internos tienen sus medidas enteras y en grados sexagesimales, existen?

A) 20 B) 18 C) 22
D) 24 E) 30

63. En un cuadrilátero convexo ABCD, se cumple: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$

$$\frac{m\angle CBD}{9} = \frac{m\angle BAC}{2} = \frac{m\angle CAD}{6}$$

Halle la $m\angle BDC$.

A) 42 B) 48 C) 52
D) 36 E) 44

64. Halle el mínimo valor entero de la medida del menor de los ángulos internos de un pentágono que están en progresión aritmética.

A) 1 B) 2 C) 37
D) 38 E) 45

65. En el cuadrilátero ABCD:

$$m\angle ADB = 90;$$

$$m\angle BCA = m\angle ACD = 15 \text{ y}$$

$$m\angle CAD = 30. \text{ Halle } m\angle BAC$$

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

66. En un cuadrilátero convexo ABCD, se cumple: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{AD}$

$$\frac{m\angle ADB}{5} = \frac{m\angle BAC}{2} = \frac{m\angle CAD}{6}$$

Halle la $m\angle BDA$.

A) 30° B) 42° C) 45°
D) 48° E) 52°

67. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un polígono equiángulo de n lados ($n \geq 3$), cada ángulo interno

$$\text{mide } \frac{180(n-2)}{n}$$

II. El máximo número de ángulos internos agudos de un polígono convexo es 3.

III. Existen polígonos regulares cuyas diagonales todas son congruentes.

A) FVV B) FFF C) VVF
D) FVF E) VVV

68. En un polígono regular el número de diagonales que se pueden trazar de los 6 últimos vértices, es al número de diagonales que se pueden trazar de los 4 primeros vértices como 2 es a 5. Determine la medida del ángulo del vértice de la estrella que se forma al intersectarse las prolongaciones de los lados de dicho polígono.

A) 100 B) 102 C) 104
D) 106 E) 108

69. En un polígono convexo se cumple que la raíz cuadrada de su número de lados aumentado en K veces el máximo número de ángulos interiores agudos que tiene el polígono, es igual a la diferencia que hay entre los números totales de diagonales medias y número total de diagonales. calcule el menor valor entero de K .

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

70. Cuál es el máximo número de ángulos obtusos que se pueden tener en un polígono convexo de n lados ($n > 4$).

A) n B) $n+4$ C) $n-2$
D) $n+1$ E) $n-3$

71. Se tienen dos polígonos regulares cuyos números de diagonales se diferencian en 27, y cuyos ángulos centrales están en la relación de $3/4$. Calcule la diferencia de las medidas de sus ángulos centrales.

A) $\frac{1}{8}$ B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

72. Si el ángulo interior y el ángulo exterior de un polígono regular mide α y $K\alpha$. Cuales son los valores enteros que puede tener K para que el polígono exista.

A) $K \leq 3$ B) $K \leq 2$ C) $K \leq 1$
D) $K \leq 4$ E) $K \leq 5$

73. En un cuadrilátero convexo ABCD se cumple que: $m\angle BAC = 15 - \phi$;
 $m\angle CAD = 45 - 3\phi$;
 $m\angle ACD = 45 + 3\phi$;
 $m\angle BDA = 60 + 2\phi$ y $m\angle BDC = 30$
Entonces la $m\angle ACB$ es:

A) 18 B) 24 C) 30
D) 36 E) 45

74. De las siguientes proposiciones. Cuales son verdaderas y falsas:

- En todo polígono, ningún par de lados se intersecan excepto en sus extremos.
- Toda recta que pase por un punto interior a un polígono convexo interseca al contorno en dos puntos y solo en dos.
- En todo polígono, ningún par de lados son colineales.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

75. En un cuadrilátero convexo ABCD: $AB = BC = CD$ y además $m\angle ACD - m\angle ACB = 60$.

Se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{AD}$ en M. Halle la medida del menor ángulo que determinan la mediatriz y el lado AD.

A) 30 B) 45 C) 60
D) 72 E) 80

76. ABC es un triángulo rectángulo: $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$, $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{AC}$, P y Q puntos medios de $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $MN = m$ y $AC = n$ entonces PQ mide:

A) $\frac{m+n}{2}$ B) $\frac{m+2}{2}$
C) $\frac{n-m}{2}$
D) $\frac{2n-m}{2}$ E) $\frac{m+n}{3}$

77. En un polígono convexo de n lados par, al aumentar el número de lados en 4, el número de diagonales trazadas desde vértices no consecutivos aumenta en 49. Halle el número total de segmentos trazados desde los puntos medios no consecutivos.

A) 88 B) 96 C) 92
D) 94 E) 104

78. Al disminuir en 6 la medida de cada ángulo interno de un polígono equiángulo se obtiene otro polígono cuyo número de diagonales es los $\frac{3}{5}$ del número de diagonales del polígono inicial. Halle el número de lados de este polígono.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

79. En un polígono regular su número de diagonales medias multiplicado por el doble número de lados de otro polígono superior de 1 lado esta comprendido entre 200 y 299, halle la medida del ángulo interior del polígono regular.

A) 108° B) 120° C) 135°
D) 210° E) 404°

80. En un triángulo ABC desde el vértice B se trazan las perpendiculares $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ a las bisectrices exteriores de los ángulos A y C, luego se trazan las perpendiculares $\overline{BF}$ y $\overline{BG}$ a las bisectrices internas de los ángulos C y A. Si $DF = a$, $GE = b$ y $FG = \frac{a+b}{2}$ entonces la longitud de $\overline{DE}$ es:

A) $\frac{4}{3}(a+b)$ B) $\frac{2}{3}(a+b)$
C) $\frac{3}{2}(a+b)$
D) $\frac{5}{3}(a+b)$ E) $2(a+b)$

81. En un polígono convexo cuyo número de lados es par, el máximo número de diagonales trazados desde todos los vértices no consecutivos es 39. Entonces, el número de diagonales trazados desde los 3 primeros vértices no consecutivos es:

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

82. En un polígono regular cuyo semi-perímetro es p , el número que expresa su perímetro es el mismo que el que expresa su número de diagonales. Además la medida del ángulo interior es p veces la medida del ángulo exterior. Entonces, la longitud del lado del polígono es:

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

83. Se tienen tres polígonos convexos equiángulos tal que el número de diagonales totales del primer y tercer polígono están en la relación de 1 a 6, la suma de las medidas de los ángulos internos del segundo y primer polígono se diferencian en 360 y las medidas de los ángulos externos del tercer y segundo polígono están en la relación de 2 a 3. Entonces, la medida del ángulo interno del primer polígono es :

A) 60° B) 90° C) 108°
D) 120° E) 140°

84. En un cuadrilátero convexo ABCD se verifica que: $m\angle ABC = m\angle ADC = 90^\circ$
 $m\angle BAC = 30^\circ$. Luego se trazan $\overline{AP} \perp \overline{BD}$ y $\overline{CQ} \perp \overline{BD}$. Si $AP - CQ = \sqrt{3}u$ entonces la longitud (en u) de $\overline{BD}$ es :

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

85. Exteriormente a un triángulo acutángulo ABC se dibujan cuadrados de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ cuyos centros son D, E y F respectivamente. Si $DE = 6$ cm. Halle BF (en cm).

A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

86. Se tienen dos polígonos regulares cuyos números de diagonales se diferencia en 342 y cuyas medidas de sus ángulos centrales están en la relación como 2 es a 3. Halle la diferencia de las medidas de sus ángulos centrales.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

87. El doble de la diferencia entre número de diagonales medias y el número de diagonales de un polígono convexo es igual a m veces ($m \in \mathbb{N}$), el número máximo de ángulos interiores agudos que tiene el polígono más la raíz cúbica del número de lados. Entonces, el menor valor de m es :

A) 9 B) 4 C) 6
D) 17 E) 21

88. Se tiene un trapecio ABCD en el cual las bisectrices interiores de B y C se interceptan en P. Las bisectrices exteriores de los mismos ángulos se interceptan en Q. Halle PQ (en u) si las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden 4 y 10u respectivamente ($\overline{BP} \parallel \overline{AD}$).

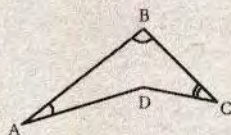
A) 5,0 B) 5,5 C) 6
D) 6,5 E) 7,0

89. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Un polígono equilátero y equiángulo, es un polígono regular.
- II. En un polígono cualquiera, la suma de las medidas de los ángulos internos se calcula con la fórmula $180^\circ(n-2)$, siendo n el número de lados del polígono.
- III. La suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono es igual a 360° .

- A) VVV B) VVV C) FFF
D) VFF E) VFF

90. En la figura mostrada se verifica que:
 $AD = DC = BC$. Si $m\angle BAD = 2x$,
 $m\angle BCD = 5x$ y $m\angle ABC = 60 + 2x$,
 entonces x es:

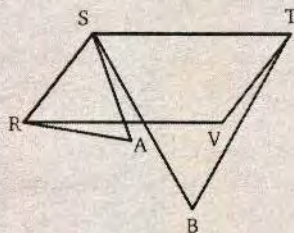


- A) 10 B) 12 C) 15
D) 20 E) 24

91. Dos lados consecutivos de un paralelogramo miden a y b ($a > b$); se trazan las bisectrices exteriores, formándose un nuevo cuadrilátero. Halle la longitud de una de las diagonales del nuevo cuadrilátero.

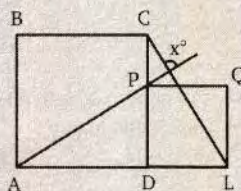
- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $a+b$
C) $2(a+b)$
D) $a+2b$ E) $(a+b)\sqrt{2}$

92. En la siguiente figura RSTV es paralelogramo y ARS y STB son triángulos equiláteros. Calcule la $m\angle AVB$.



- A) 45 B) 75 C) 60
D) 53 E) 72

93. De la figura adjunta: ABCD y PQLD son cuadrados. Calcular " x "



- A) 45 B) 75 C) 120
D) 90 E) 60

94. Se tiene un rectángulo ABCD, sobre la prolongación de $\overline{AD}$ se toma el punto "P" tal que $BP = 16$ m. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{CP}$.

- A) 2 m B) 4 m C) 8 m
D) 12 m E) 16 m

**CLAVES**

1	A
2	A
3	D
4	D
5	C
6	E
7	C
8	D
9	D
10	B
11	B
12	D
13	B
14	A
15	C
16	C
17	B
18	D
19	A
20	C
21	E
22	E
23	B
24	C
25	D

26	A
27	B
28	C
29	B
30	A
31	C
32	E
33	B
34	A
35	B
36	B
37	C
38	A
39	C
40	C
41	D
42	E
43	D
44	A
45	C
46	C
47	E
48	A
49	E
50	D

51	C
52	A
53	C
54	C
55	C
56	E
57	A
58	D
59	A
60	D
61	E
62	C
63	A
64	D
65	B
66	A
67	E
68	E
69	A
70	B
71	C
72	B
73	C
74	A
75	C

76	A
77	C
78	B
79	B
80	C
81	D
82	D
83	D
84	A
85	B
86	E
87	A
88	C
89	E
90	B
91	B
92	C
93	D
94	C
95	A
96	D
97	A
98	E
99	B
100	B

EXÁMENES DE
ADMISIÓN
UNI - UNMSM

UNI - 2002 - I

PROBLEMA 01:

Deduzca el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

- I. En todo triángulo acutángulo la altura es menor que la semisuma de los otros dos lados que parten del mismo vértice.
- II. En todo triángulo, la altura es menor que la medida de los otros tres lados del triángulo.
- III. En todo triángulo acutángulo, la suma de las tres alturas es mayor que la suma de los tres lados del triángulo.

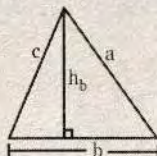
A) VVV

B) VVF

C) FFV

D) VFV

E) VFF

Resolución:**I. Verdadera:**

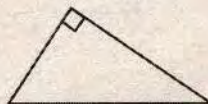
$$h_b = a$$

$$h_b = c$$

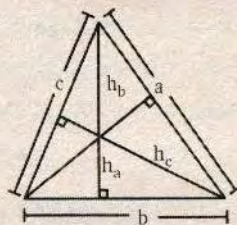
(I) + (II) :

$$2h_b < a + b$$

$$\rightarrow h_b < \frac{a + b}{2}$$

II. Falsa:

La altura puede ser de menor o igual longitud que cualquiera de los tres lados dependiendo del tipo de triángulo.

III. Falsa:

$$h_b < \frac{a+c}{2} \quad (I)$$

$$h_a < \frac{b+c}{2} \quad (II)$$

$$h_c < \frac{a+b}{2} \quad (III)$$

$$(I) + (II) + (III): \quad h_a + h_b + h_c < a + b + c$$

Rpta.: E

PROBLEMA 02: En un cuadrilátero ABCD, el punto P divide el segmento AC en la razón 1/3, ($AP < PC$). Si las áreas de las regiones triangulares ABD y BDC miden 70 m^2 y 30 m^2 , respectivamente, entonces el área de la región triangular PBD mide

A) 45 m^2

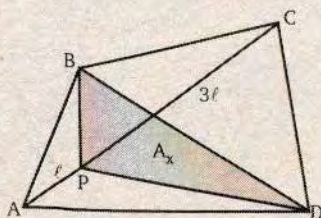
B) 44 m^2

C) 42 m^2

D) 40 m^2

E) 39 m^2

Resolución:



Piden :

$$A_{\triangle PDB} = A_x$$

Datos:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{1}{3}$$

$$A_{\triangle ADB} = 70 \text{ m}^2$$

$$A_{\triangle BCD} = 30 \text{ m}^2$$

Por propiedad:

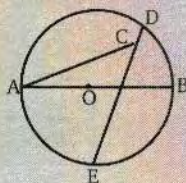
$$A_{\triangle PBC} = 3(A_{\triangle ABP})$$

$$A_{\triangle PDC} = 3(A_{\triangle APD})$$

$$\rightarrow A_{\triangle PBCD} = 3(A_{\triangle PBD})$$

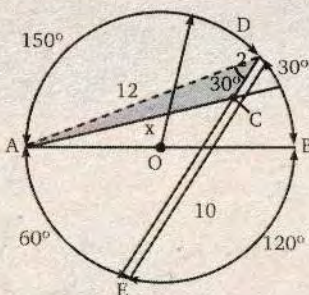
PROBLEMA 04: En la figura O es el centro de la circunferencia, $\overline{AB}$ es diámetro, $m\widehat{DB} = 30^\circ$; $m\widehat{BE} = 120^\circ$.

Si $CD = 2$ m y $EC = 10$ m, entonces AC es igual a



- A) $2\sqrt{37+6\sqrt{3}}$ B) $2\sqrt{37+4\sqrt{3}}$ C) $2\sqrt{37+2\sqrt{3}}$
 D) $2\sqrt{37-6\sqrt{3}}$ E) $2\sqrt{37-4\sqrt{3}}$

Resolución:



Piden :

$$AC = x$$

Datos :

$$m\widehat{DB} = 30^\circ \text{ y } m\widehat{EB} = 120^\circ$$

Del grafico :

$$m\widehat{AD} = 150^\circ$$

Como

$$m\widehat{AD} = m\widehat{DBE}$$

$$\rightarrow AD = DE = 12$$

$$m\angle ADE = 30^\circ$$

$\triangle ADC$ (Teorema de cosenos)

$$x^2 = 12^2 + 2^2 - 2(12)(2)\cos 30^\circ$$

$$\therefore x = 2\sqrt{37-6\sqrt{3}}$$

Rpta.: D

PROBLEMA 06: Sobre las rectas: $x + y - 4 = 0$ y $x - y = 0$ se encuentran las diagonales de un rombo. Si uno de sus vértices es el origen de coordenadas y la medida de sus diagonales es igual a la medida del lado del rombo, entonces el área del rombo es:

A) $5\sqrt{3}$

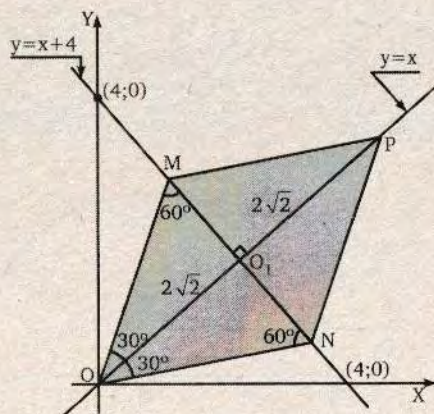
B) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$

C) $6\sqrt{3}$

D) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

E) $\frac{14}{3}\sqrt{3}$

Resolución:



Piden $A_{\square OMPN}$

$\square OMPN = \text{rombo}$

La diagonal

$MN = OM = MP = PN = ON$

$\rightarrow \triangle OMN: \text{equilátero}$

Como

$$OO_1 = 2\sqrt{2} \rightarrow MN = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore A_{\square OMPN} = \frac{(4\sqrt{2}) \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} \right)}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Rpta.: B

UNI - 2002 - II

PROBLEMA 07: En la figura, halle el área sombreada comprendida entre el triángulo ABC recto en B y la semicircunferencia, sabiendo que el arco BT es de 120° .

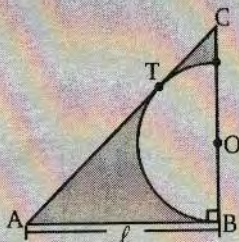
A) $\frac{(3\sqrt{3} - \pi)}{6} \ell^2$

B) $\frac{(2\sqrt{3} - \pi)}{6} \ell^2$

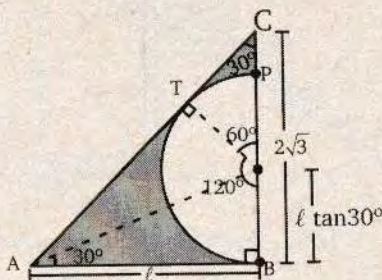
C) $\frac{(\sqrt{3} + \pi)}{4} \ell^2$

D) $\frac{(\pi - \sqrt{3})}{6} \ell^2$

E) $\frac{(n+1)}{4} \ell^2$



Resolución:



Sea S el área de la región sombreada, luego:

$$S = \triangle_{ABC} - \text{segmento circular}$$

$$S = \frac{\ell \times \ell \sqrt{3}}{2} - \frac{\pi \left(\frac{\ell}{\sqrt{3}} \right)^2}{2}$$

$$S = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{2} - \frac{\pi \ell^2}{6}$$

$$\therefore S = \left(\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} \right) \ell^2$$

Rpta.: A

PROBLEMA 08: En la siguiente figura $BM + MA = BC + CA$, la longitud de la circunferencia generada al tomar como diámetro el segmento MB es:

A) $\pi(m - h)$

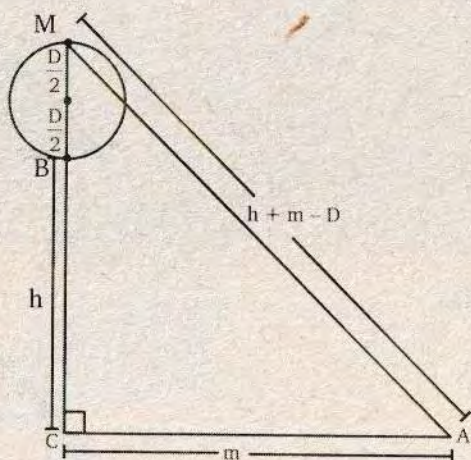
B) $\pi\sqrt{h^2 + m^2} - h$

C) $\frac{2\pi hm}{2h + m}$

D) $\frac{\pi hm}{2h + m}$

E) $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi mh}{2h + m} \right)$

Resolución:



Piden, la longitud de la circunferencia de diámetro MB.

Dato

$$MB + MA = BC + CA$$

Por teorema de pitagoras

$$(h + m - D)^2 = m^2 + (h + D)^2$$

$$[(h - D) + m]^2 = m^2 + (h + D)^2$$

Resolviendo :

$$D = \frac{mh}{2h + m}$$

Piden :

$$\ell = \pi D$$

$$\therefore \ell = \frac{\pi mh}{2h + m}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 10: Sea ABCD un cuadrado de lado L ; M es el punto del lado $\overline{AD}$, E es un punto en el lado $\overline{AB}$, P es la intersección de $\overline{MB}$ con $\overline{EC}$ y F es tal que DF contiene a P . Sabiendo que: $|\overline{AE}| = |\overline{EF}|$, calcule el valor de $|\overline{FB}|$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}L$

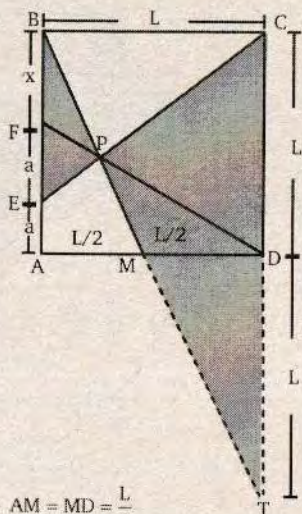
B) $\frac{L}{2}$

C) $\frac{L}{3}$

D) $\frac{L}{4}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{3}L$

Resolución:



Piden $BF = x$

Dato $CD = L \rightarrow AM = MD = \frac{L}{2}$

Para definir el problema, F debe estar en $\overline{AB}$

$\triangle TBC : CD = DT = L$ (Base media)

Por homotecia inversa:

$BF = FE$ (Centro de homotecia P)

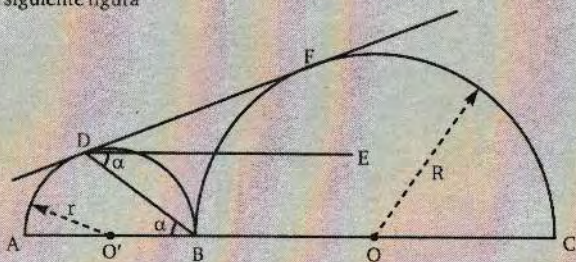
$$\rightarrow a = x$$

Luego: $3x = L$

$$\therefore x = \frac{L}{3}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 11: En la siguiente figura



Si $r = 1$ u, $R = 3$, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, $m\angle OBF = 60^\circ$. Entonces la medida del ángulo BDE es:

A) $7,5^\circ$

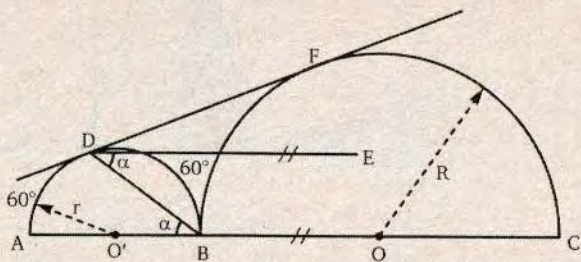
B) 10°

C) 15°

D) $22,5^\circ$

E) 30°

Resolución:



Piden α

Como $\overline{DE} \parallel \overline{AC} \rightarrow m\angle ABD = \alpha$

Por dato $m\angle OBF = 60^\circ$

Entonces $m\angle B\widehat{F} = 60^\circ$

Por propiedad $m\widehat{AD} = m\widehat{BF} = 60^\circ$

Luego, por ángulo inscrito

$$\therefore \alpha = 30$$

Rpta.: E

PROBLEMA 12: En un trapezoide ABCD, $A=BC$, $m\hat{B} = 90^\circ$, $m\hat{D} = 45^\circ$. Se traza el segmento BH perpendicular a $\overline{AD} = \ell$ calcule BH.

A) $\frac{2}{3}\ell$

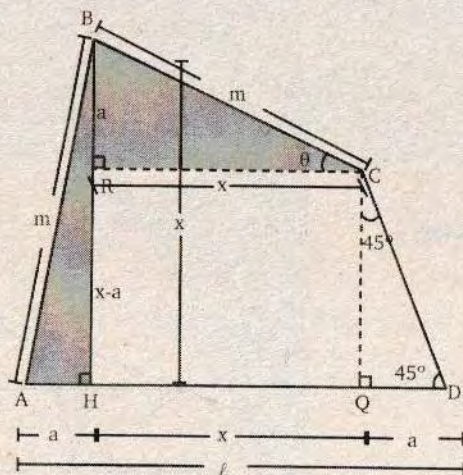
B) $\frac{\ell}{2}$

C) $\frac{\ell}{3}$

D) $\frac{\ell}{4}$

E) $\ell \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolución:



Piden $BH = x$

Se trazan $\overline{CR}$ y $\overline{CQ}$ perpendiculares a $\overline{BH}$ y $\overline{AD}$, respectivamente

$$\triangle BHA = \triangle CRB (A - L - A)$$

$$AH = BR = a$$

$$BH = RC = x$$

Luego

$$\triangle DQC (\text{notable } 45^\circ)$$

$$CQ = QD = x - a$$

$$AD = l = a + x + x - a$$

$$\therefore x = \frac{l}{2}$$

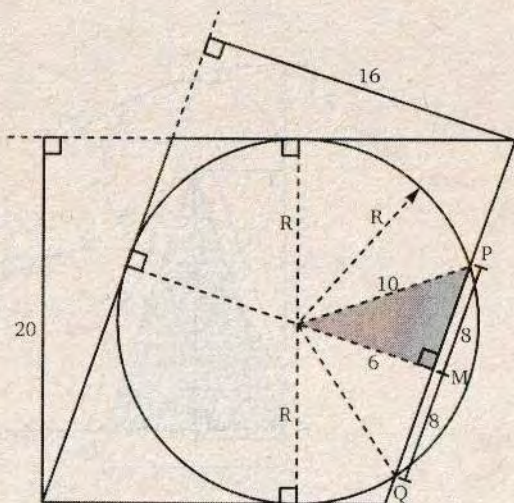
Rpta.: B

UNI - 2003 - I

PROBLEMA 13: Una circunferencia es tangente a tres lados de un paralelogramo. Si las alturas del paralelogramo miden 16 y 20 unidades. Calcule la longitud de la cuerda encerrada por la circunferencia en el lado no tangente.

- A) 12 u B) 14 u C) 16 u
D) 18 u E) 20 u

Resolución:



Piden PQ:

Del gráfico: $2R = 20$

$$\rightarrow R = 10$$

$$10 + OM = 16$$

$$\rightarrow OM = 6$$

En $\triangle$ OMP : PM = 8

$$\therefore PQ = 16$$

Rpta.: A

PROBLEMA 14: En el interior de un cuadrante de una circunferencia $\mathcal{C}_1$ de radio R , se construye una semicircunferencia $\mathcal{C}_2$, cuyo diámetro es uno de los radios del cuadrante $\mathcal{C}_1$. Halle el radio de otra circunferencia $\mathcal{C}_3$ tangente a $\mathcal{C}_1$, a $\mathcal{C}_2$ y un radio del cuadrante.

A) $\frac{R}{6}$

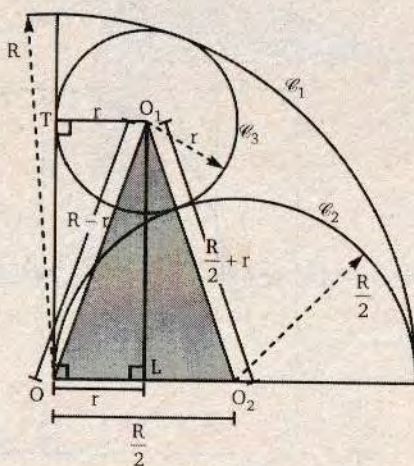
B) $\frac{R}{5}$

C) $\frac{R}{4}$

D) $\frac{R}{3}$

E) $\frac{R}{7}$

Resolución:



Piden r ; dato R

$\square OT_1L$: rectángulo

$$\rightarrow TO_1 = OL = r$$

ΔOO_1O_2 : Teorema de Euclides:

$$\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = (R - r)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{2}\right)(r)$$

$$\therefore r = \frac{R}{4}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 15: Los lados de un triángulo miden, en metros $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{8}$. Halle la longitud de la menor altura.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m

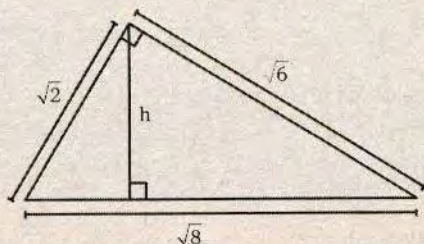
B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ m

C) $\sqrt{2}$ m

D) $\sqrt{6}$ m

E) $\sqrt{8}$ m

Resolución:



Se pide la longitud de la menor altura h .

Del gráfico: $(\sqrt{8})^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2$

Entonces el triángulo es rectángulo. Por relaciones métricas:

$$\sqrt{8} h = (\sqrt{2})(\sqrt{6})$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 16: En la figura mostrada, ABCD es un paralelogramo; M y N son puntos medios de AB y AD, respectivamente. Halle el área de la región sombreada, si la medida del paralelogramo es 120 u^2 .

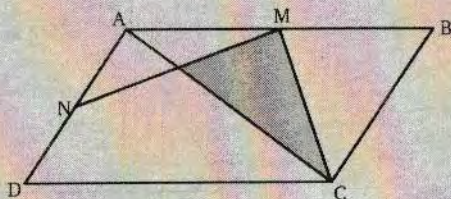
A) $30,0 \text{ u}^2$

B) $27,5 \text{ u}^2$

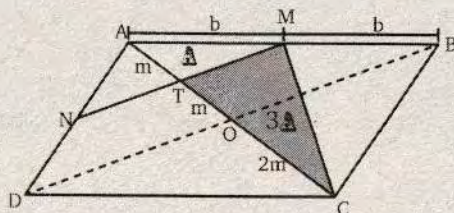
C) $25,0 \text{ u}^2$

D) $22,5 \text{ u}^2$

E) $20,5 \text{ u}^2$



Resolución:



Se pide el área de la región sombreada:

$$A_{\Delta TMC} = A_x$$

Como $AM = MB$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BD}$

$$\rightarrow AT = TO = m \text{ y } OC = 2m$$

Si $A_{\Delta ATM} = A$

$$\rightarrow A_x = 3A$$

Del gráfico:

$$4A = \frac{A_{ABCD}}{4} = \frac{120}{4} u^2$$

$$4A = 30 u^2 \rightarrow A = 7,5 u^2$$

$$\therefore A_x = 22,5 u^2$$

Rpta.: A

PROBLEMA 17:

La suma de dos ángulos exteriores de un triángulo mide 270° ; el lado mayor mide 48 m. Halle la distancia del baricentro al circuncentro.

A) 6 m

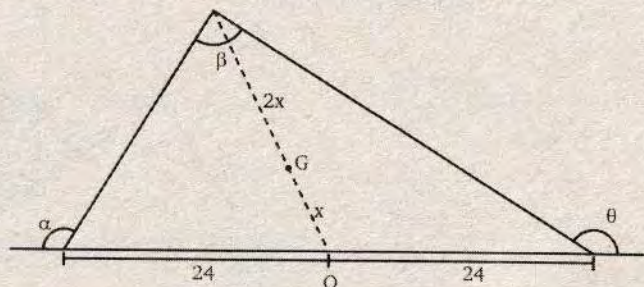
B) 8 m

C) 12 m

D) 16 m

E) 20 m

Resolución:



Resolución:

Como el triángulo es rectángulo, el mayor lado es la hipotenusa y su punto medio es el circuncentro del triángulo; como G es baricentro, piden:

$$GO = x$$

Entonces: $3x = 24$

$$\therefore x = 8$$

Rpta.: B**PROBLEMA 18:**

Tres rectas se intersecan dos a dos, ¿cuántos puntos del plano, determinado por dichas rectas, equidistan de las tres rectas?

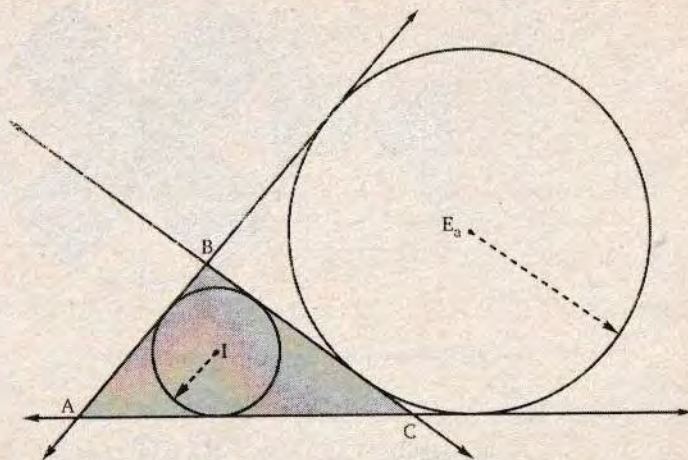
A) uno

B) dos

C) tres

D) cuatro

E) cinco

Resolución:

Piden el número de puntos del plano, determinado por las rectas, que equidistan con dichas rectas.

Para el triángulo ABC, el incentro (I) y los tres excentros (E_a ; E_b ; E_c) equidistan con las tres rectas.

Luego el número de puntos es:

$$\therefore \text{cuatro}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 19: En la figura se muestra una circunferencia de radio R , y en dos diámetros perpendiculares. Con centro en los extremos de estos diámetros se trazan arcos de circunferencia de radio R . Halle el perímetro de la región sombreada.

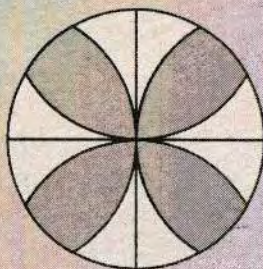
A) $4\pi R$

B) $\frac{8}{3}\pi R$

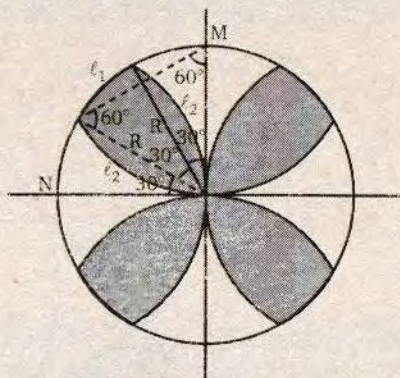
C) $3\pi R$

D) $\frac{10}{3}\pi R$

E) $\frac{11}{3}\pi R$



Resolución:



Piden el perímetro de la región sombreada:

$$2p = 4(\ell_1 + 2\ell_2) \quad \dots\dots(I)$$

Del gráfico:

$$\ell_1 = \frac{2\pi R}{12} = \frac{\pi R}{6}$$

$$\ell_2 = \frac{2\pi R}{6} = \frac{\pi R}{3}$$

Reemplazando en (I): $2p = 4\pi R \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right)$

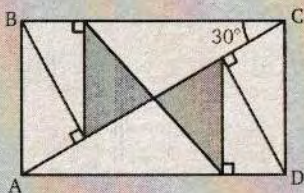
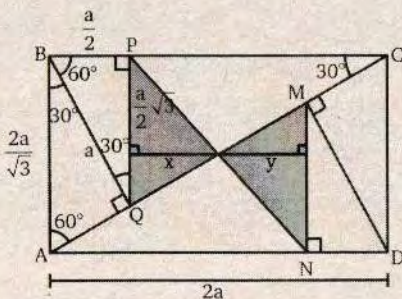
$$\therefore 2p = \frac{10\pi R}{3}$$

Rpta.: B

UNMSM - 2008 - I

PROBLEMA 20: En el rectángulo ABCD, $BC = 2a$ cm. Calcular el área de la región sombreada.

- A) $\frac{a^2}{2} \text{ cm}^2$
 B) $a^2 \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$
 C) $2a^2 \text{ cm}^2$
 D) $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$
 E) $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

**Resolución:**

Por base media:

$$PQ = \frac{a}{2}$$

Entonces:

$$MP = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$A_{\Delta \text{somb.}} = \frac{b \times \frac{3a}{2}}{2} = \frac{3ab}{4}$$

Luego, la relación R pedida es:

$$R = \frac{A_{\Delta \text{ somb.}}}{A_{\text{total}}} = \frac{4}{4ab}$$

$$\therefore R = \frac{3}{16}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 21: En la figura, $AB=6\text{ cm}$ y $BC=10\text{ cm}$; P , Q y T son puntos de tangencia. Calcular el área de la región sombreada.

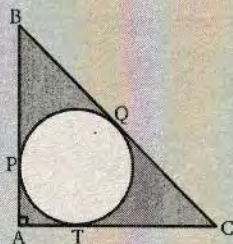
A) $(18 - 2\pi)\text{ cm}^2$

B) $(24 - 2\pi)\text{ cm}^2$

C) $(18 - 4\pi)\text{ cm}^2$

D) $(24 - 4\pi)\text{ cm}^2$

E) $(24 - \pi)\text{ cm}^2$



Resolución: Por Poncelet en el triángulo rectángulo:

Si $AB = 6\text{ cm}$ y $BC = 10\text{ cm} \Rightarrow AC = 8\text{ cm}$

$$6 + 8 = 10 + 2R \Rightarrow R = 2$$

En la figura:

$$S_{\triangle} = S_O + S_{\text{somb.}}$$

$$S_{\text{somb.}} = S_{\triangle} - S_O = \frac{6 \cdot 8}{2} - \pi(2)^2$$

$$S_{\text{somb.}} = (24 - 4\pi)\text{ cm}^2$$

Rpta.: A

PROBLEMA 22: Si la longitud de la base de un triángulo aumenta en un 20% y la longitud de la altura disminuye en 30%, ¿en que porcentaje varía el área?

A) Disminuye en 16%

B) Disminuye en 10%

C) Disminuye en 14%

D) Disminuye en 11%

E) Disminuye en 18%

Resolución:

$$A_1 = \frac{b \times h}{2} = 0,5 b \times h$$

$$A_2 = \frac{120\%b \times 70\%h}{2} = 0,42 b \times h$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,5b \times h \rightarrow \\ 0,42b \times h \rightarrow \end{array} \right\} x = 84\% b \times h$$

Por lo tanto: el área disminuye:

$$100\% - 84\% = 16\% b \times h$$

$\therefore$ Disminuye en 16%

Rpta.: A

PROBLEMA 23:

En una circunferencia, cuyo radio r metros, se traza una cuerda de a metros de longitud, distante b metros del centro. ¿Qué relación determina r ?

- A) $\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = ab - r$ B) $\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 = ab + r$ C) $\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = ab + r^2$
 D) $\frac{a}{2} = r - b$ E) $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2 + b^2$

Resolución:

De los datos:

Del $\triangle OMA$: Por Pitágoras:

$$AM = \sqrt{r^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{r^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow a = 2\sqrt{r^2 - b^2}$$

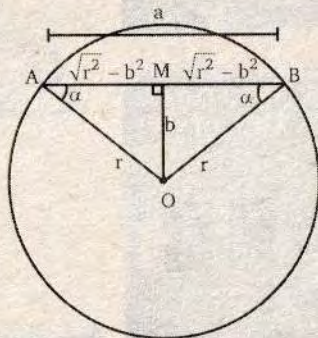
Operando:

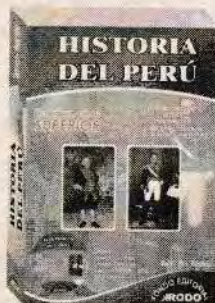
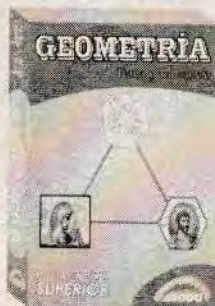
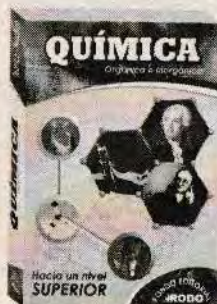
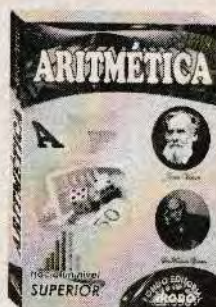
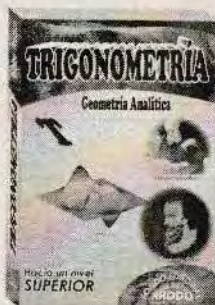
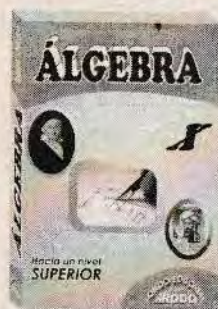
$$a^2 = 4(r^2 - b^2)$$

$$\frac{a^2}{4} = r^2 - b^2$$

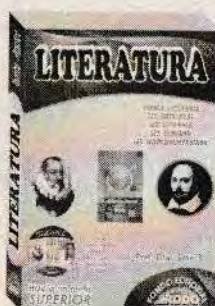
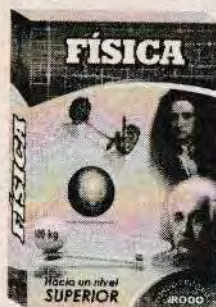
$$\therefore r^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$$

Rpta.: C





FONDO EDITORIAL
ARODO





N°	TEMA
1	Segmentos - Ángulos
2	Triángulos (Propiedades, Clasificación, Congruencia y Aplic.)
3	Cuadriláteros - Polígonos
4	Circunferencia (Propiedades, ángulos de la circunferencia, cuadriláteros inscrito e inscriptible, posiciones relativas)
5	Proporcionalidad y Semejanza Triángulos - R. M. Circunferencia
6	Relaciones Métricas en Triángulos y en Cuadriláteros
7	Áreas (Triangulares - Cuadrangulares y Circulares)
8	Rectas y Planos - Diedros y Triedros
9	Poliedros y Poliedros Regulares
10	Prisma - Pirámide
11	Cilindro - Cono
12	Esfera - Teorema de Pappus
13	Polígonos Regulares - Simetría - Longitud de la Circunferencia
14	Conjuntos Convexos